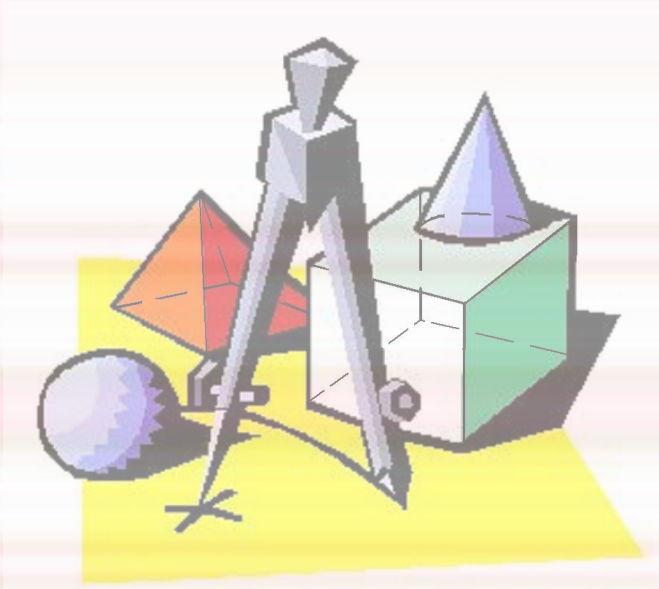
Методические материалы
по курсу «Начертательная геометрия»
для работы со студентами
Института авиатехники (поток №2)

Лекция № 9-10.
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ



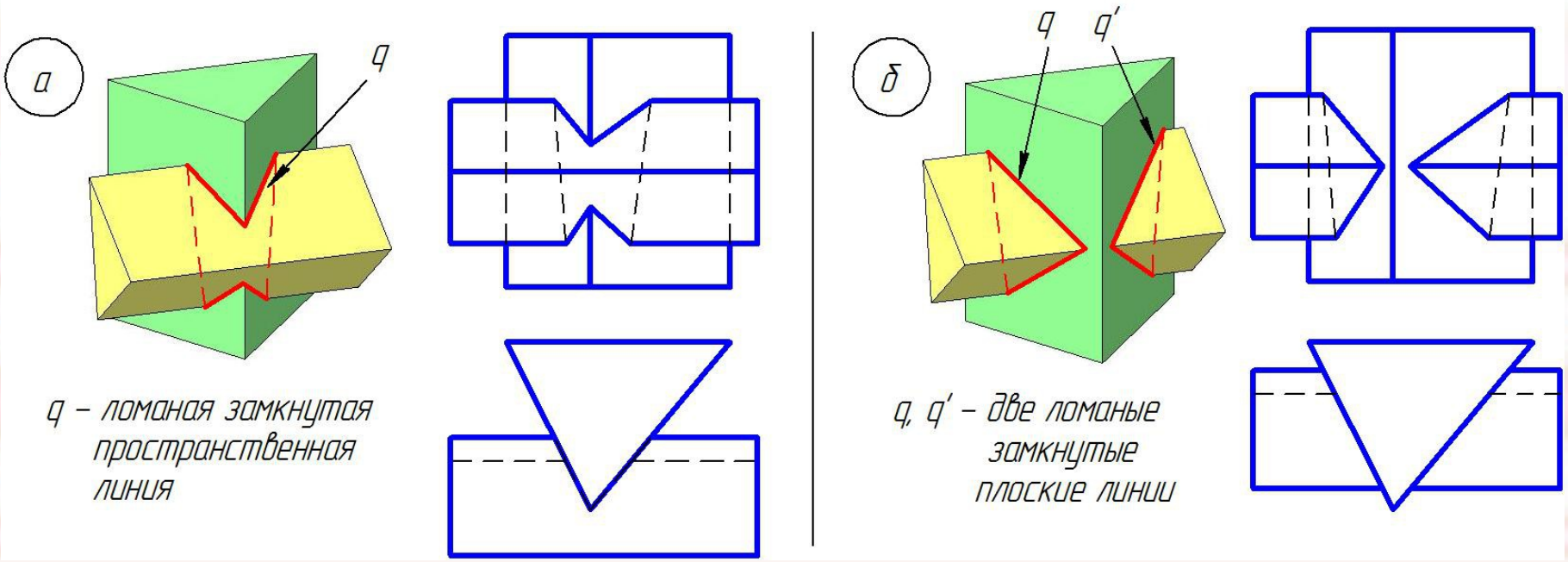
Составитель Н.В. Савченко

Пересечение многогранников

Форма линии пересечения

Пространственная или плоская замкнутая ломаная линия.

- Если один многогранник частично пересекает второй, линия пересечения – пространственная ломаная линия (рис. *а*).
- Если многогранник полностью пересекает второй – линия пересечения распадается на две и более пространственных или плоских ломаных линии (рис. *б*).



Способы построения линии пересечения

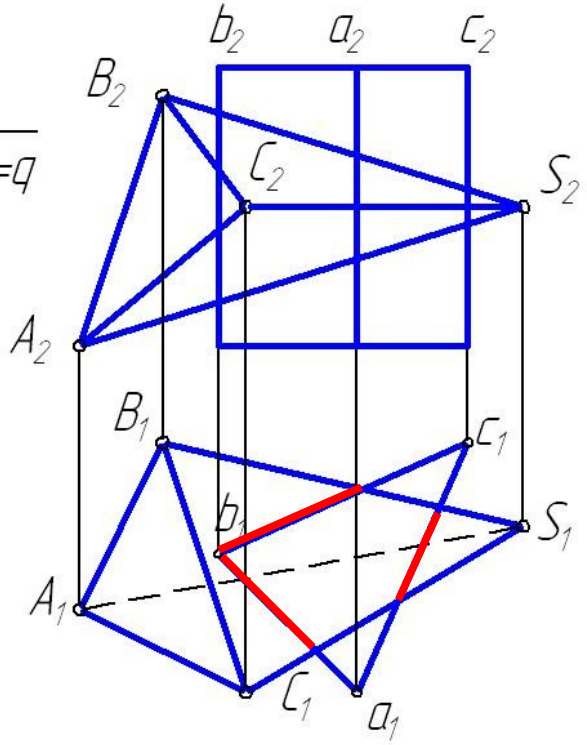
Задача заключается в нахождении вершин и звеньев ломаной линии

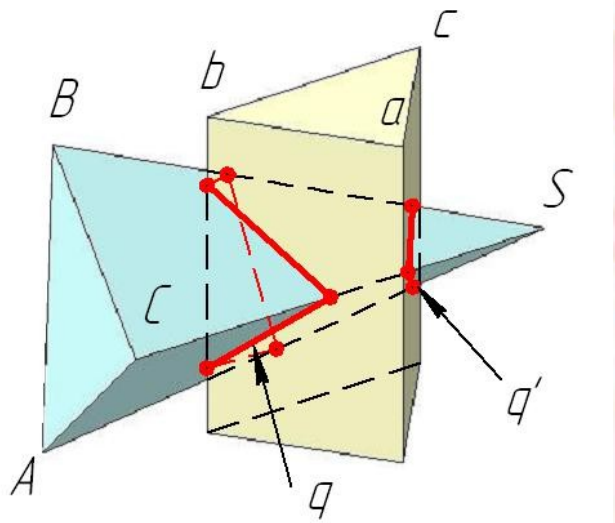
1. ***Способом ребер*** - находятся точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого (алгоритм построения точки пересечения прямой с плоскостью).

2. ***Способ граней*** – определяются отрезки прямых, по которым грани одного многогранника пересекаются с гранями другого (алгоритм построения линии пересечения плоскостей).

Частный случай; Пересекаются два многогранника, один из которых проецирующий.

$$\frac{\Phi_{приз},\ \Phi_{пир}}{\Phi_{приз} \cap \Phi_{пир} = q}$$

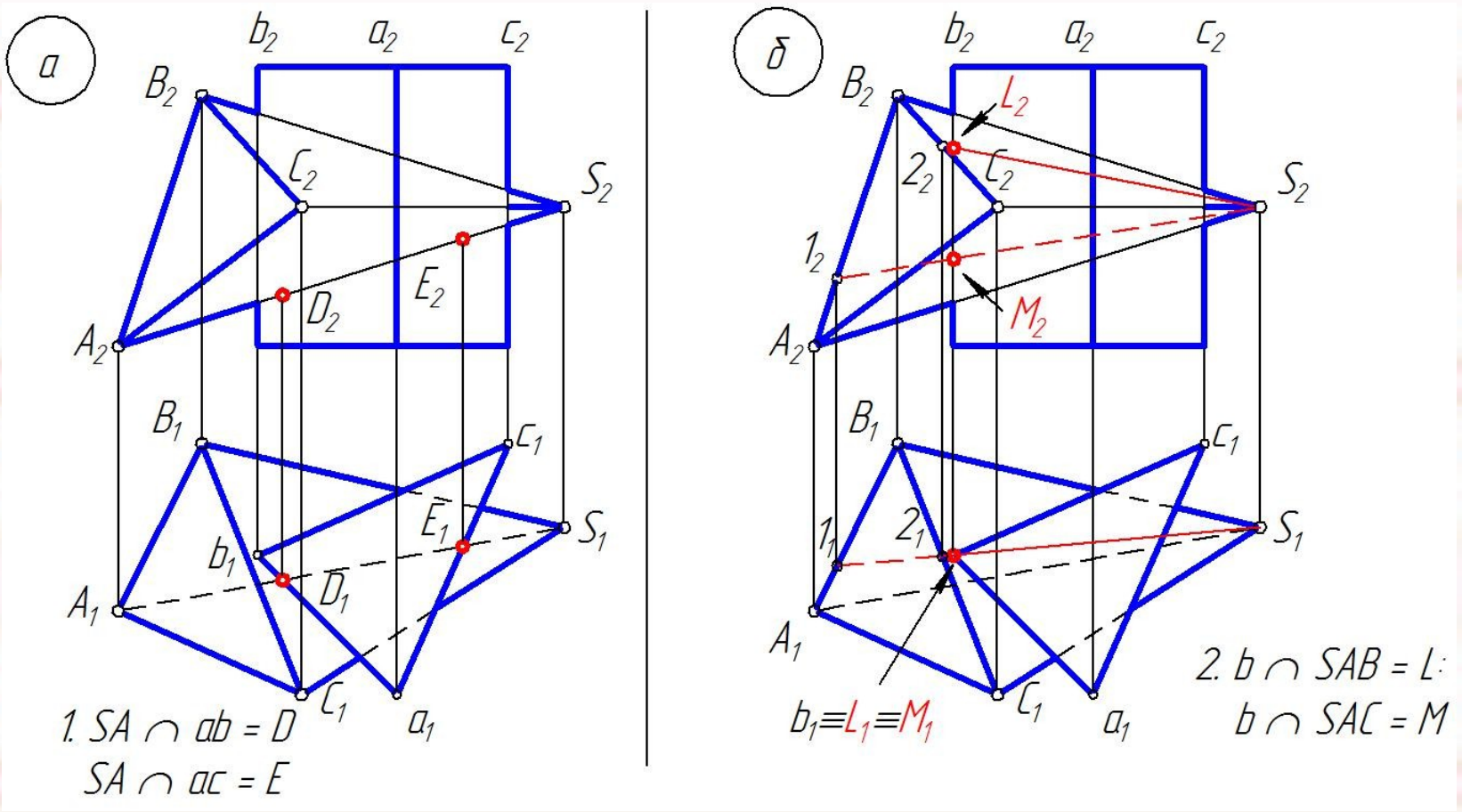


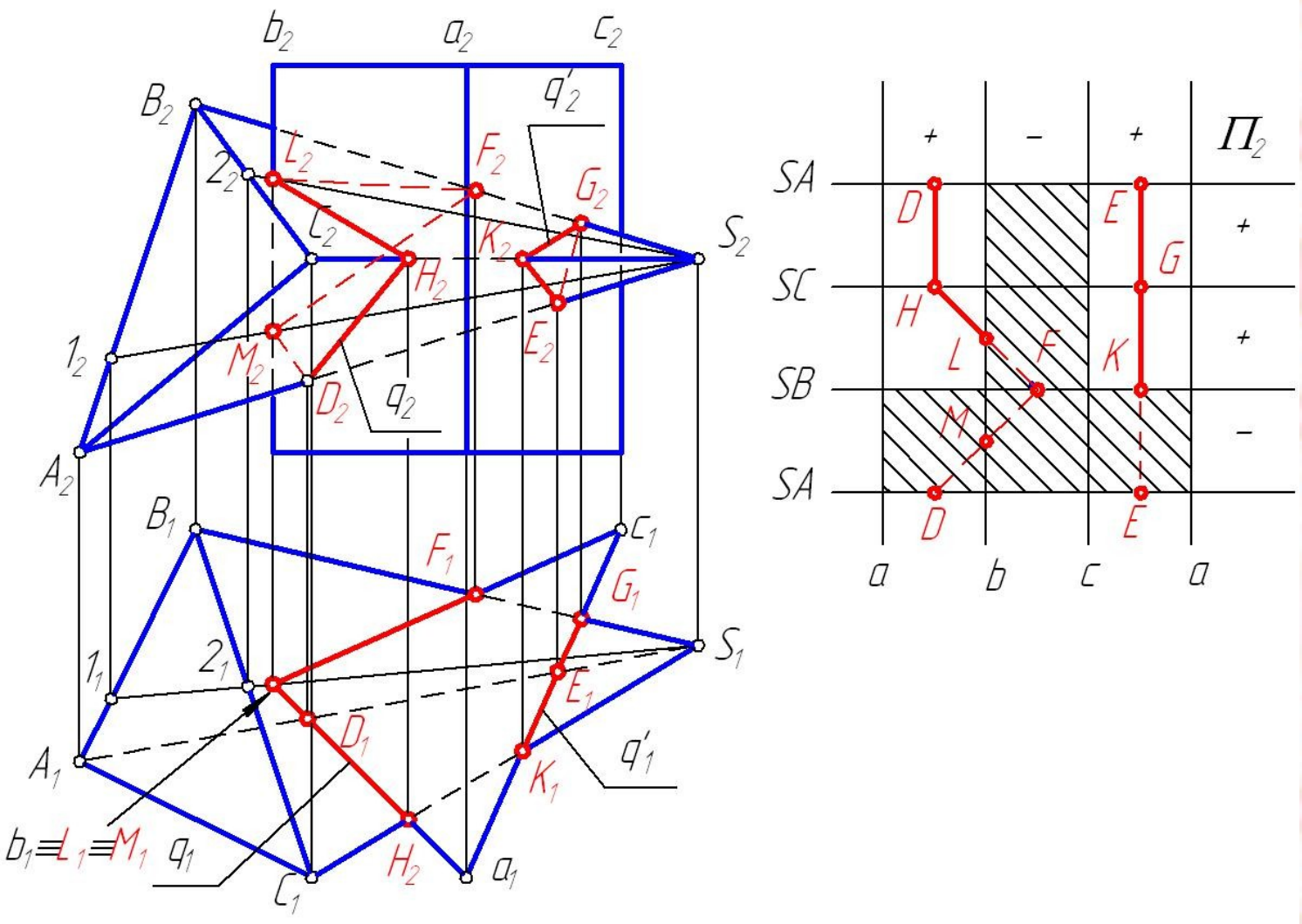


линия пересечения:
q – пространственная ломаная,
q' – треугольник

Линия пересечения распадается на две отдельные замкнутые линии, одна из которых ***плоская***, а вторая ***пространственная.***

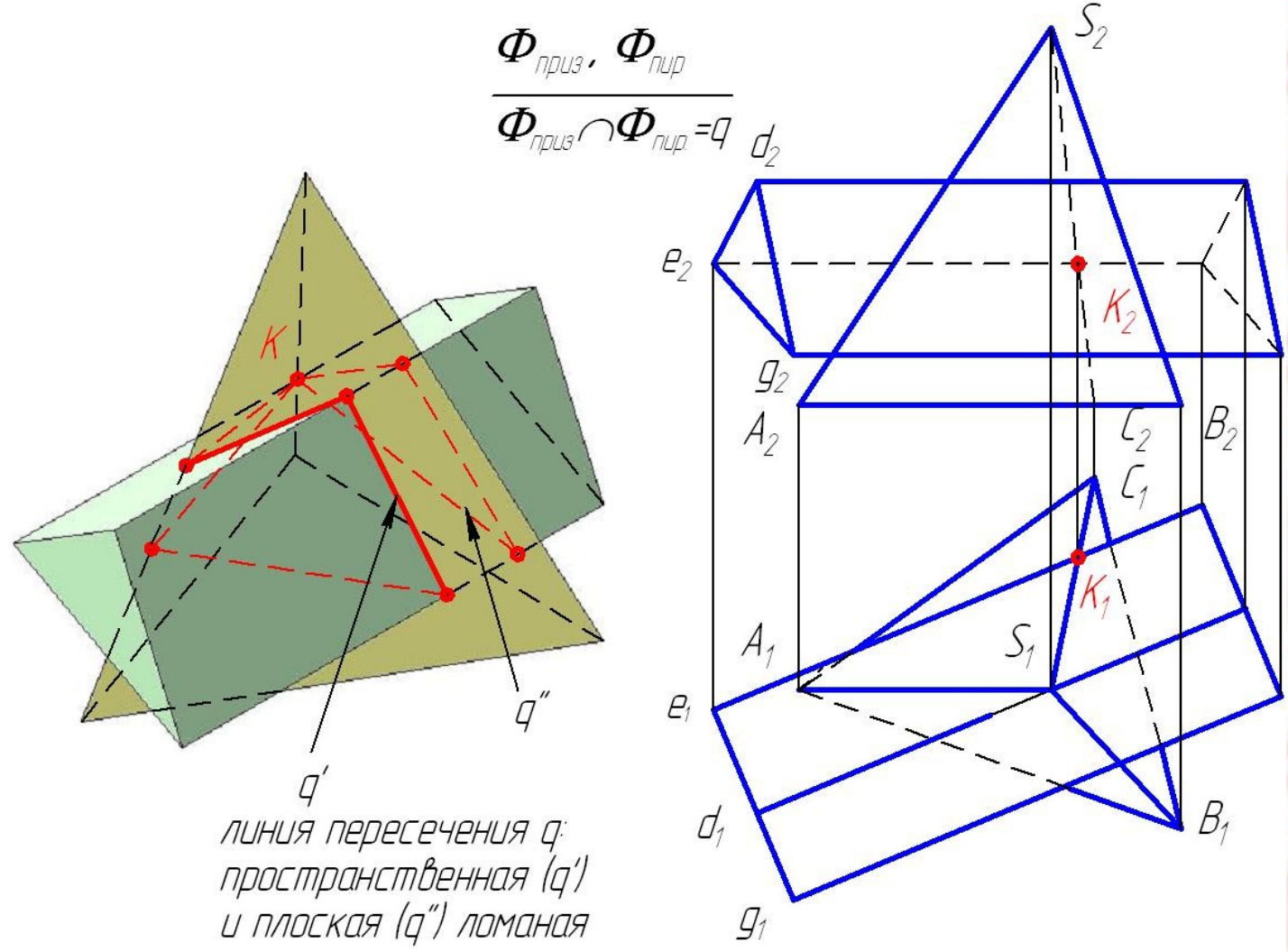
Т.к. призма проецирующая по отношению к $П_1$, горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с ее горизонтальным очерком.


а
b_2
a_2
c_2
B_2
C_2
S_2
D_2
E_2
A_2
B_1
C_1
E_1
S_1
b_1
D_1
A_1
C_1
a_1
1. SA ∩ ab = D
SA ∩ ac = E
б
b_2
a_2
c_2
B_2
L_2
2_2
C_2
S_2
1_2
M_2
A_2
B_1
C_1
1_1
2_1
S_1
A_1
$b_1 \equiv L_1 \equiv M_1$
C_1
a_1
2. b ∩ SAB = L
b ∩ SAC = M

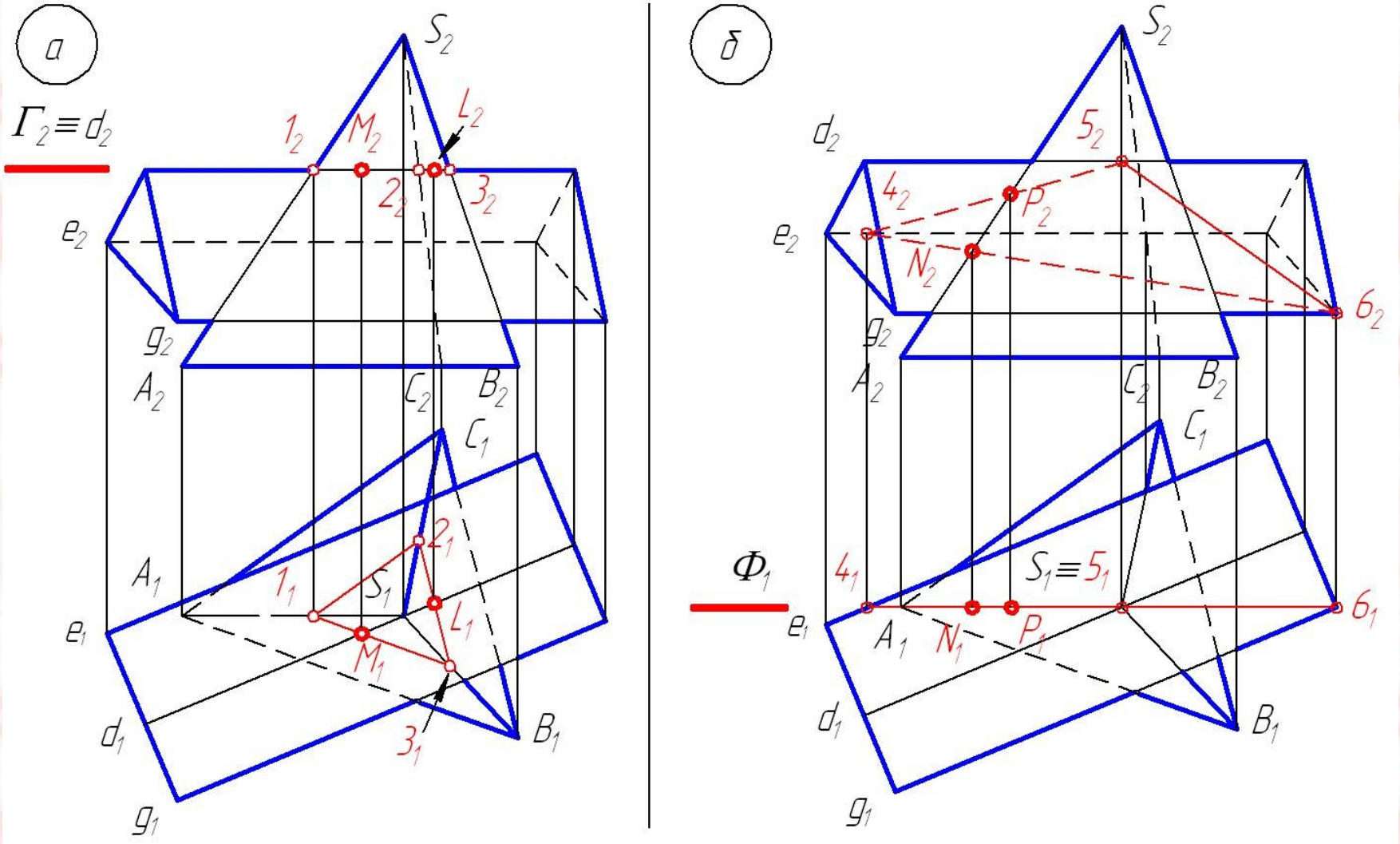


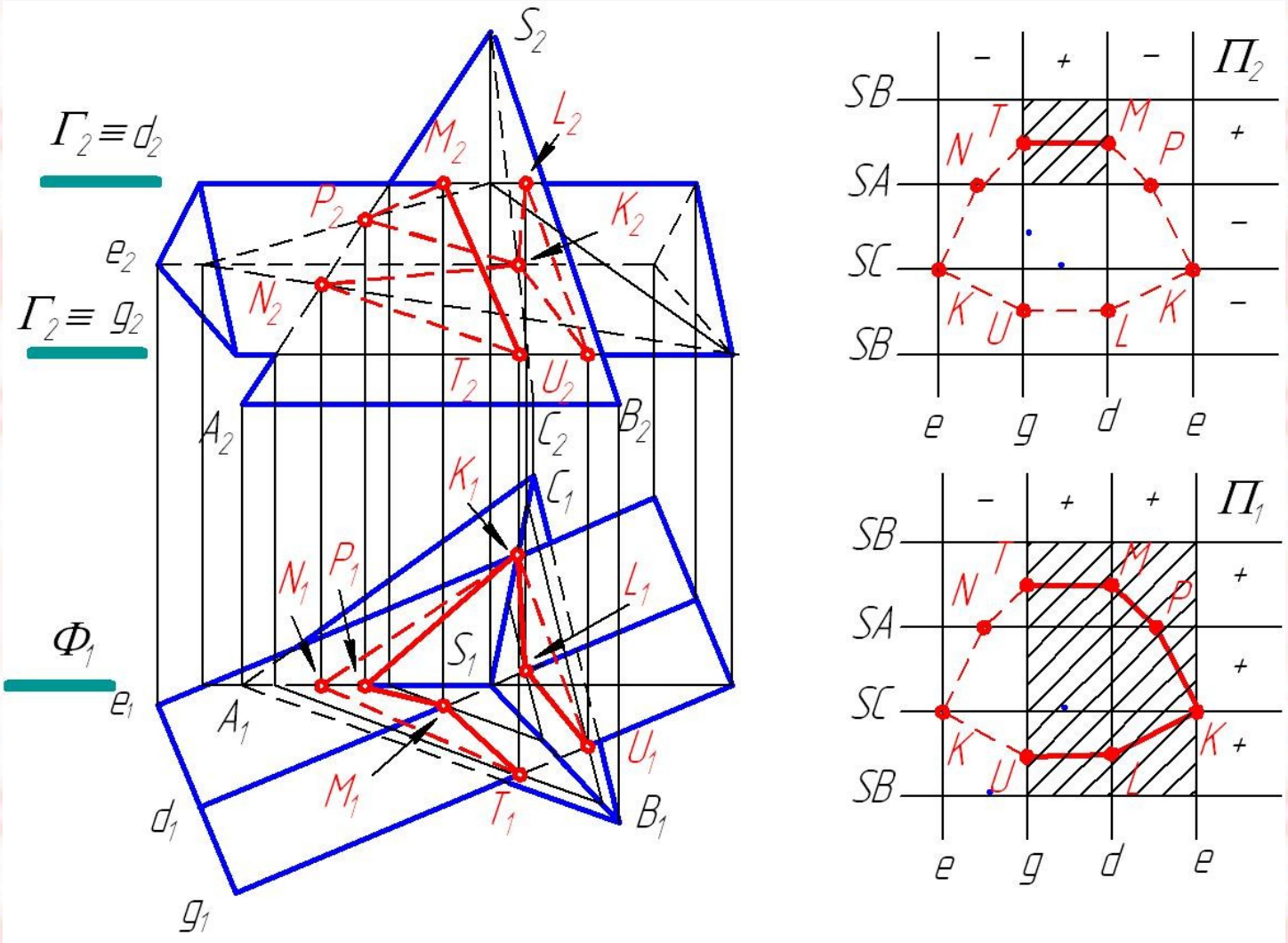
Видимы те звенья ломаной, которые являются линией пересечения двух видимых граней.

Общий случай. *Пересекаются многогранники, имеющие непроецирующие*



Графическое условие задачи задано таким образом, что известна одна из точек линии пересечения (ребра *e* и *SC* пересекаются в точке *K*).


а
$\Gamma_2 \equiv d_2$
S_2
1_2
M_2
L_2
2_2
3_2
e_2
g_2
A_2
C_2
B_2
C_1
2_1
A_1
1_1
S_1
L_1
e_1
M_1
d_1
3_1
B_1
g_1
б
S_2
d_2
5_2
4_2
P_2
e_2
N_2
6_2
g_2
A_2
C_2
B_2
C_1
Φ_1
4_1
$S_1 \equiv 5_1$
6_1
e_1
A_1
N_1
P_1
d_1
B_1
g_1


S_2
$\Gamma_2 \equiv d_2$
M_2
L_2
P_2
K_2
e_2
$\Gamma_2 \equiv g_2$
N_2
T_2
U_2
A_2
C_2
B_2
K_1
C_1
N_1
P_1
L_1
Φ_1
S_1
e_1
A_1
U_1
M_1
T_1
d_1
B_1
g_1
Π_2
SB
SA
SC
SB
e g d e
Π_1
SB
SA
SC
SB
e g d e

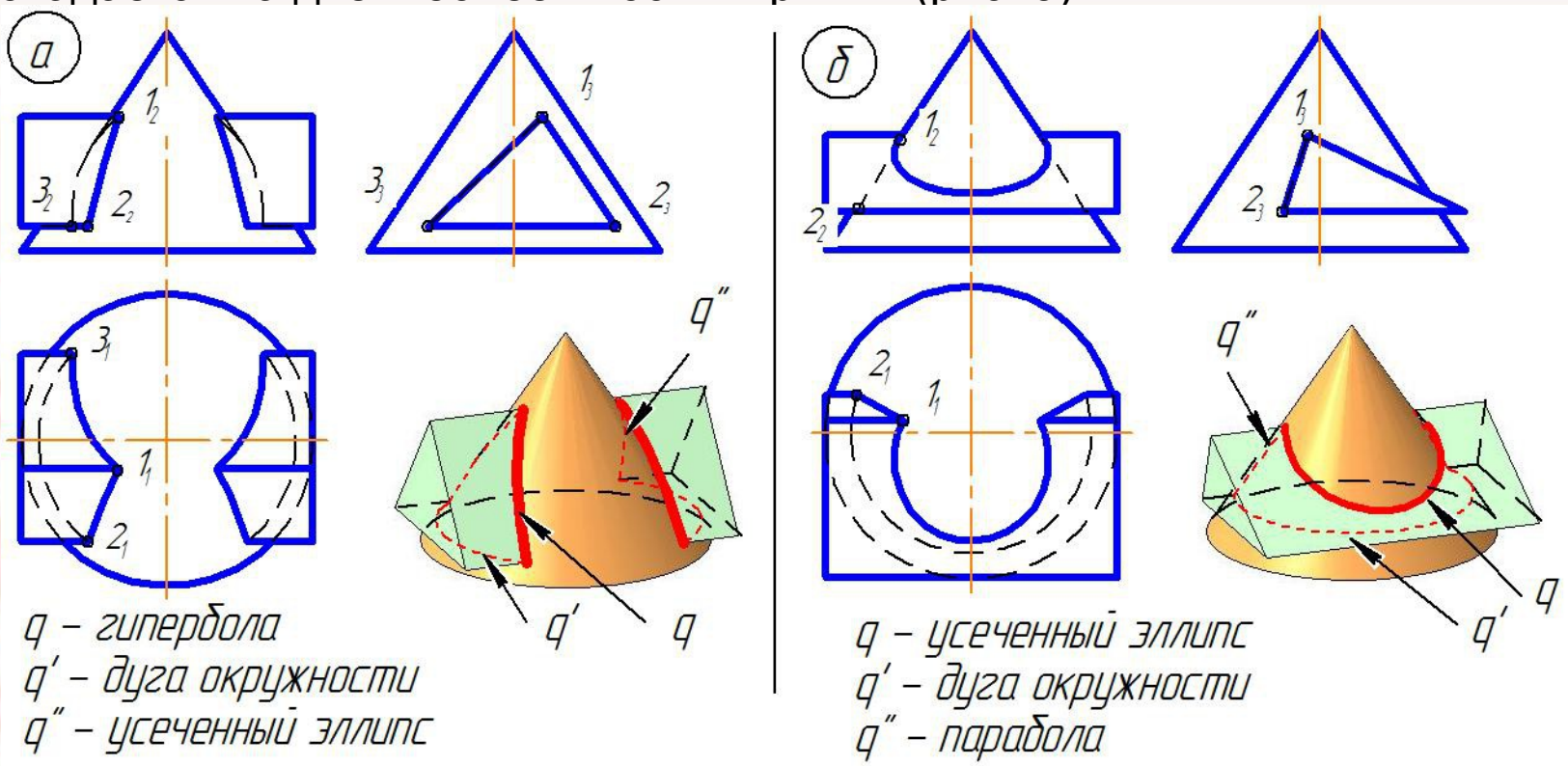
Пересечение многогранника с поверхностью вращения

Форма линии пересечения

Совокупность нескольких плоских кривых, являющихся результатом пересечения поверхности вращения с каждой из граней многогранника.

Если одна поверхность частично пересекает вторую, линия пересечения состоит из плоских кривых, попарно соединенных в точках пересечения ребер многогранника с поверхностью вращения (рис. *а*).

- Если одна поверхность полностью пересекает вторую – линия пересечения распадается на две и более плоских кривых (рис. *б*).



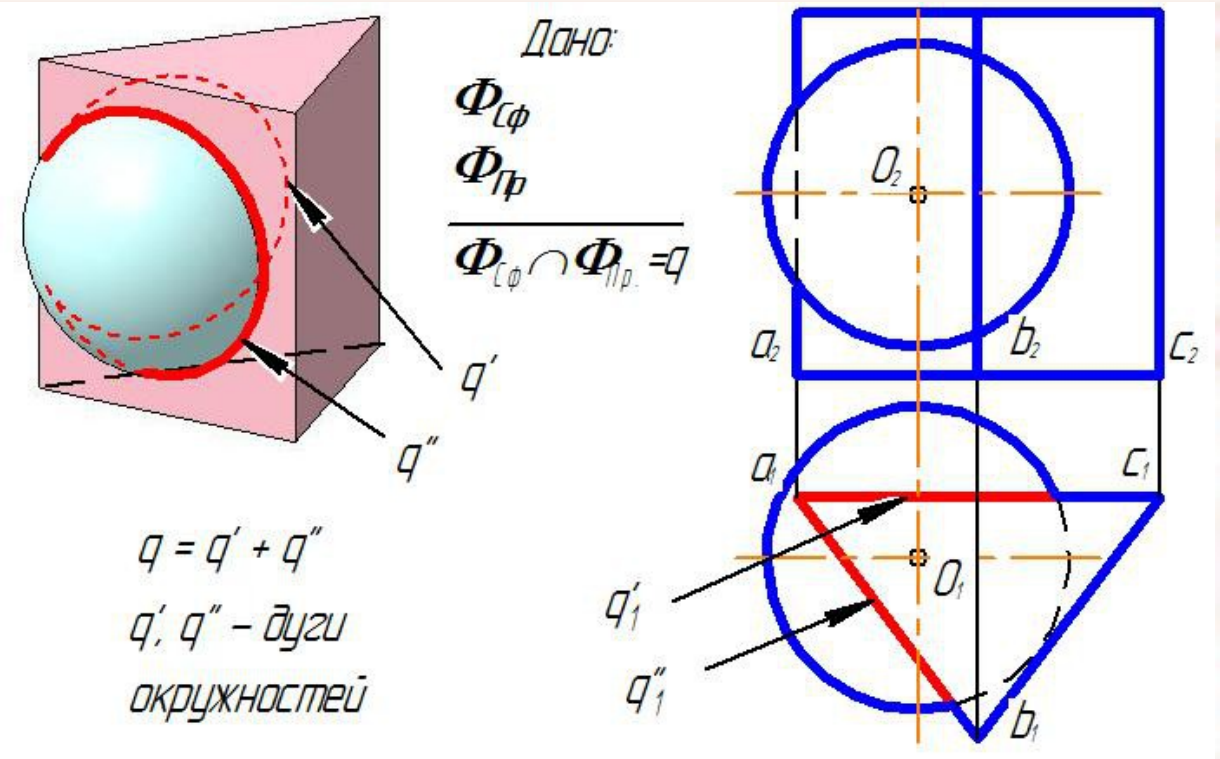
Способы построения точек линии пересечения

Задача заключается в нахождении совокупности плоских кривых и точек их пересечения

1. ***Способ 1*** - находятся точки пересечения ребер многогранника с поверхностью вращения (алгоритм построения точки пересечения прямой с поверхностью).

2. ***Способ 2*** – определяются точки линии пересечения, принадлежащие грани многогранника (алгоритм построения линии пересечения поверхности вращения с плоскостью).

Пример Построить линию пересечения призмы и сферы.

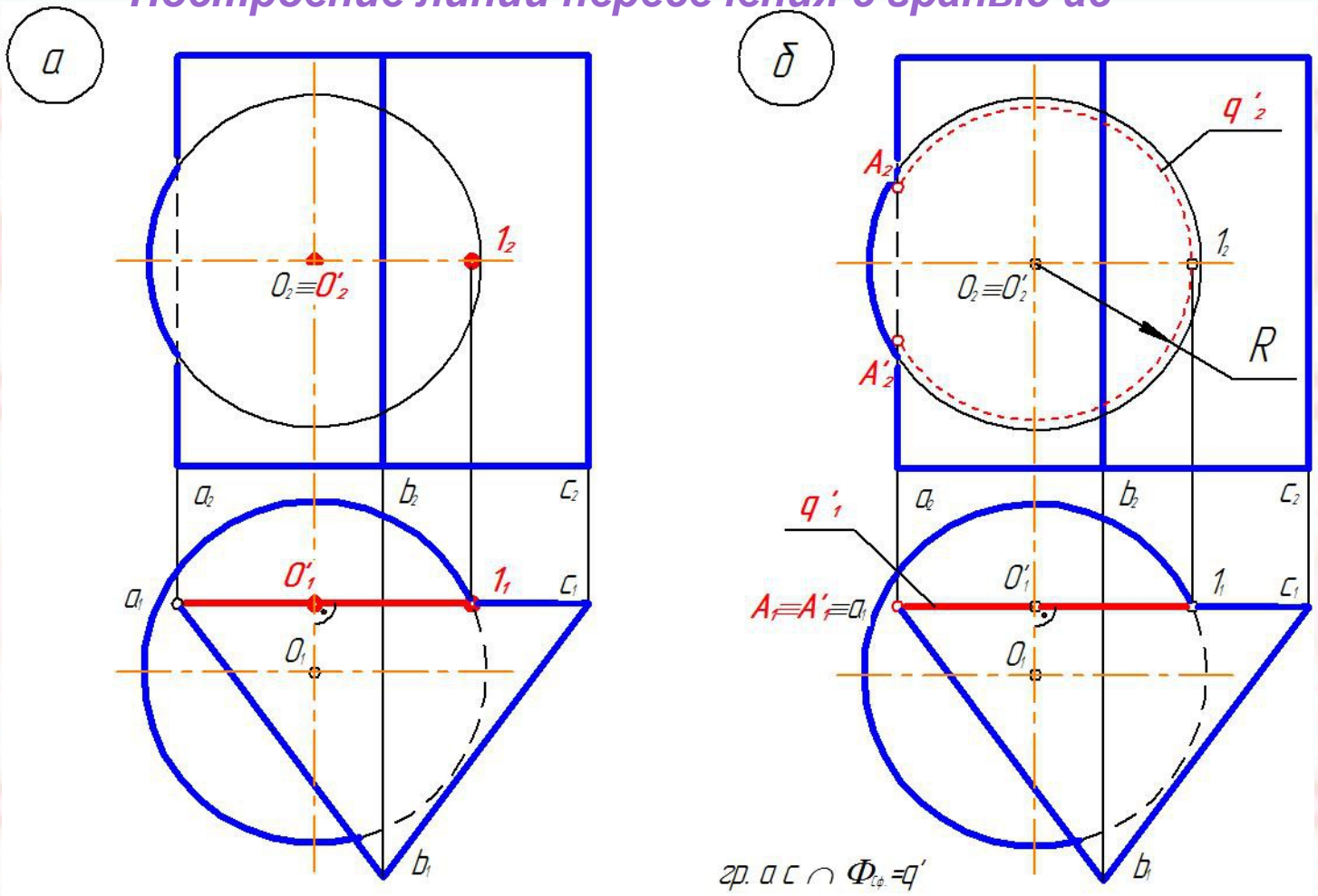


Сечение - линия, распадающаяся на две дуги окружности.

Частный случай: Одна из пересекающихся поверхностей (призма) проецирующая на $П_1$, поэтому из графического условия известна горизонтальная проекция линии пересечения — она проецируется в виде отрезков (q'_1 и q''_1) на горизонтальный очерк призмы.

Задача сводится к нахождению недостающих проекций точек, принадлежащих сфере.

Построение линии пересечения с гранью ac



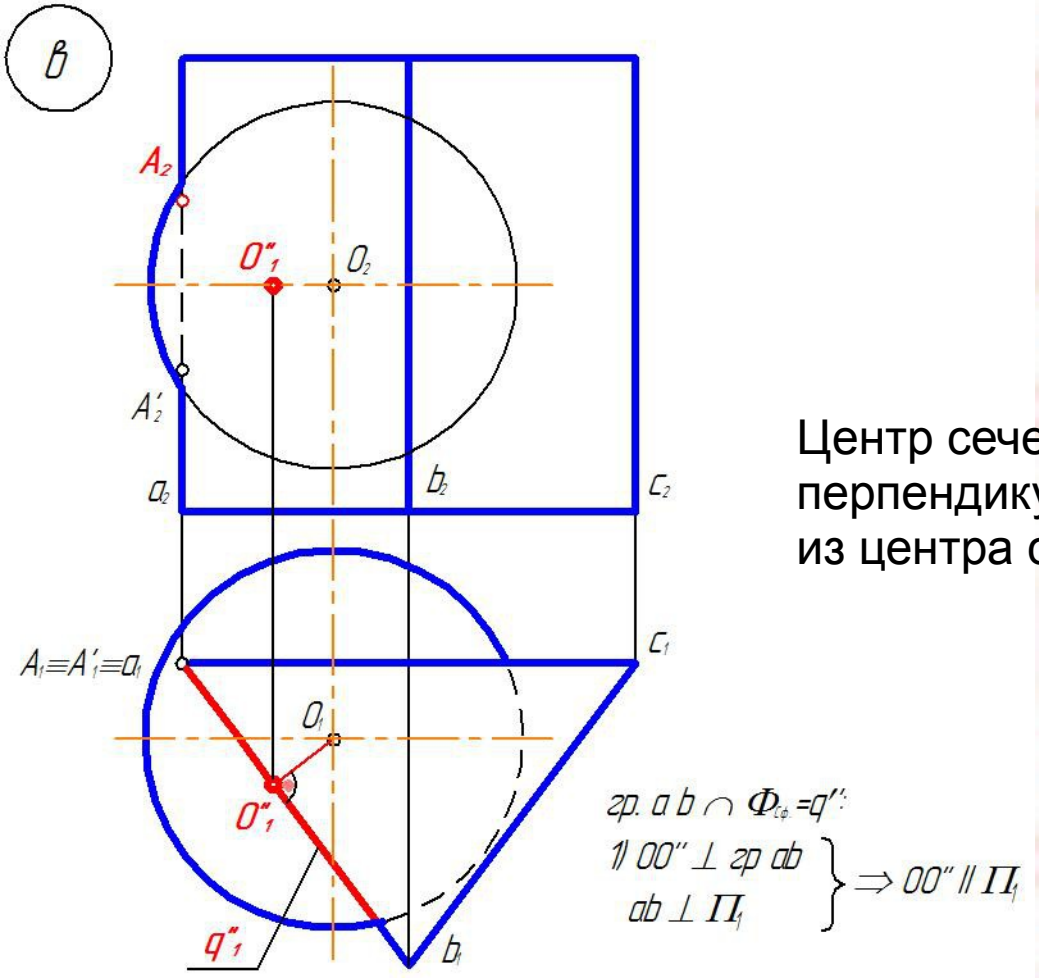
Центр сечения - точка основания перпендикуляра (точка ***O***'), построенного из центра сферы к грани призмы ***ac*** (рис *а)*.

Грань ***ac*** параллельна П2 — дуга окружности ***q'*** проецируется на нее без искажения.

Радиус дуги *R=IO,1I (рис. б).*

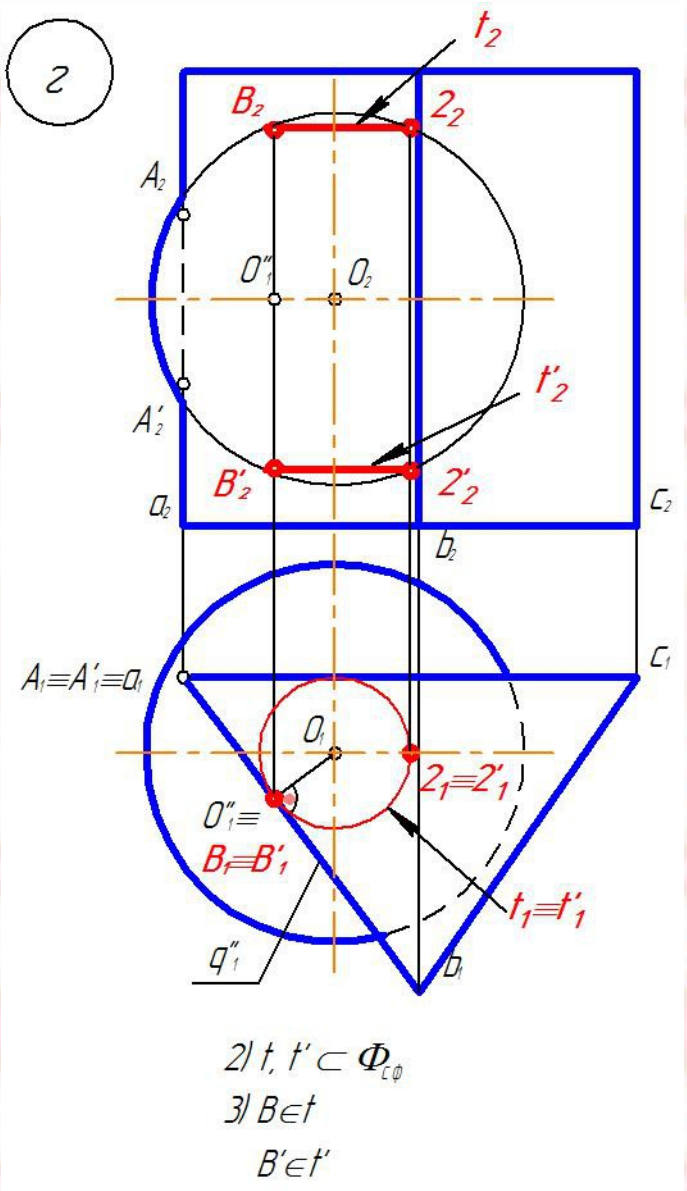
Точки *A, A',* принадлежащие ребру *a*, - точки излома, соединяющие ***q'*** и ***q''***

Построение линии пересечения с гранью ab



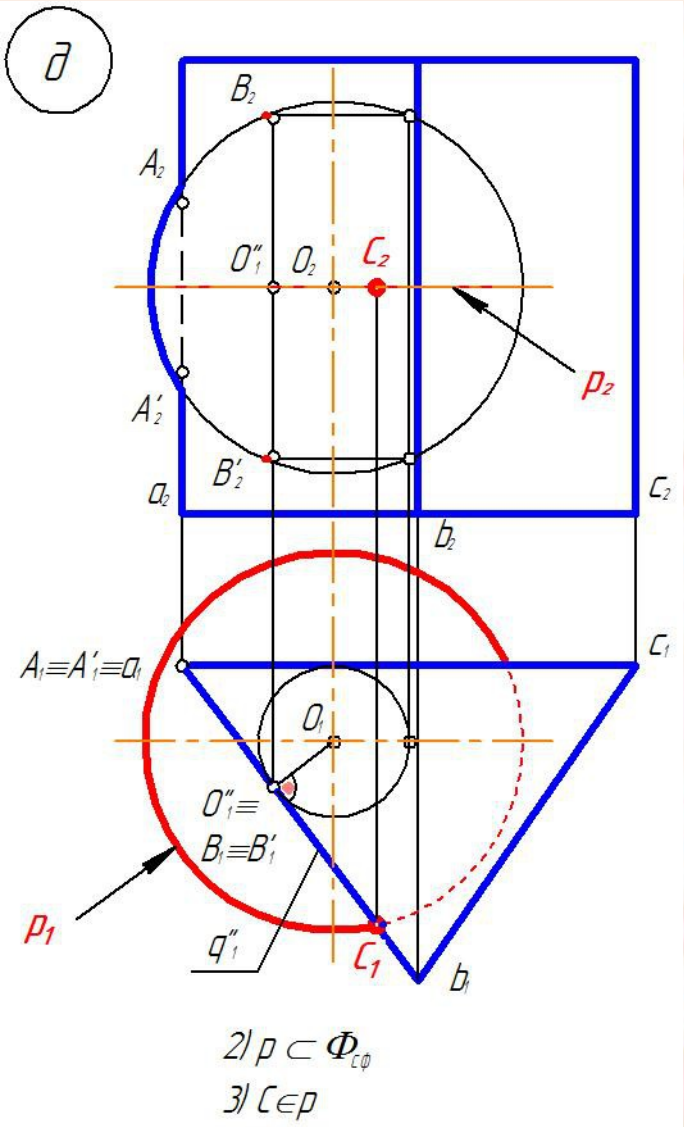
Центр сечения - точка основания перпендикуляра (точка ***O''***), построенного из центра сферы к грани призмы ***ab*** (рис ***в***).

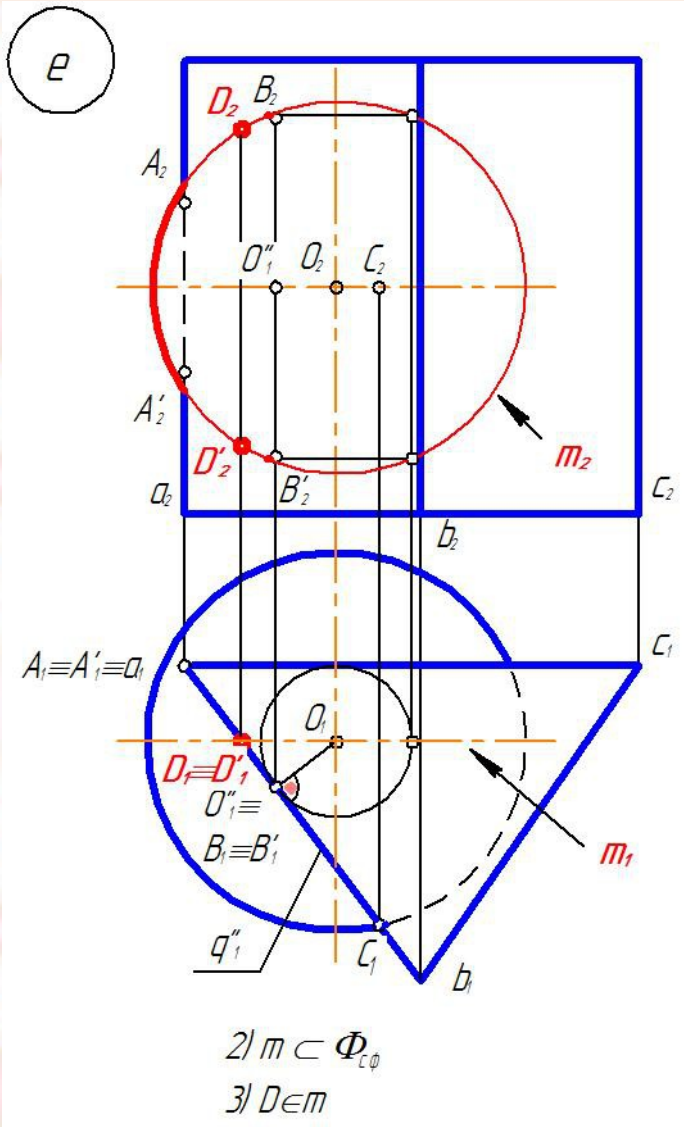
Построение линии пересечения с гранью ab



Грань ***ab*** не параллельна П2 — дуга окружности ***q"*** проецируется на П2 с искажением (эллипс).

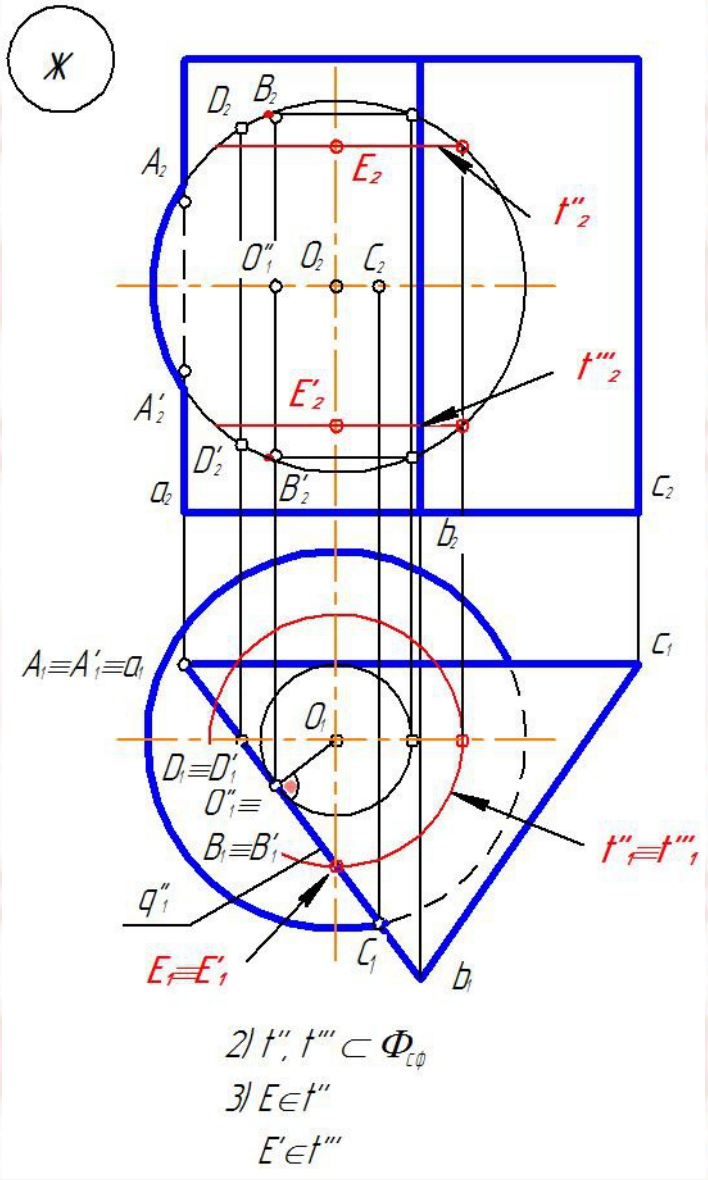
Фронтальные проекции верхней и нижней точек линии пересечения (большая ось эллипса фронтальной проекции) *находятся на параллелях t, t'* сферы. Радиус параллелей равен расстоянию от оси вращения сферы до грани *ab*.





Точка ***C*** находится на экваторе сферы (параллели ***p***). Это точка малой оси эллипса-фронтальной проекции

Точки ***D, D'*** -точки границы видимости на $П_2$, находится на фронтальном очерковом меридиане сферы ***m*** .



Точки ***E, E'*** лежат на профильном очерковом меридиане и являются точками границы видимости относительно П3.
Если не строится профильная проекция (как в данном случае), эти точки промежуточные и необходимы для более точного построения лини пересечения.
Они найдены с помощью параллелей сферы ***t", t'".***

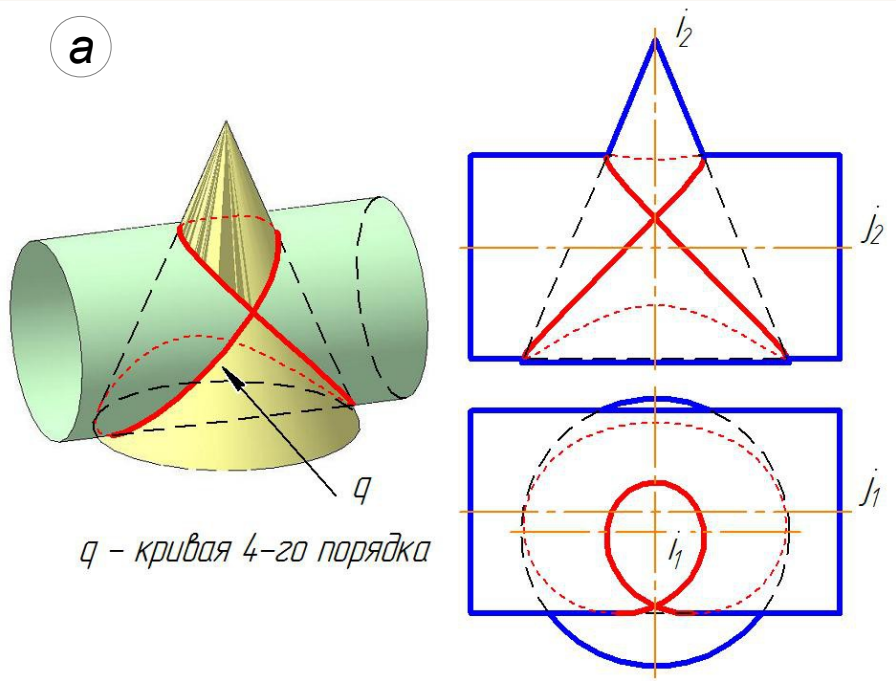
Последовательно соединяются точки линии пересечения с учетом видимости.

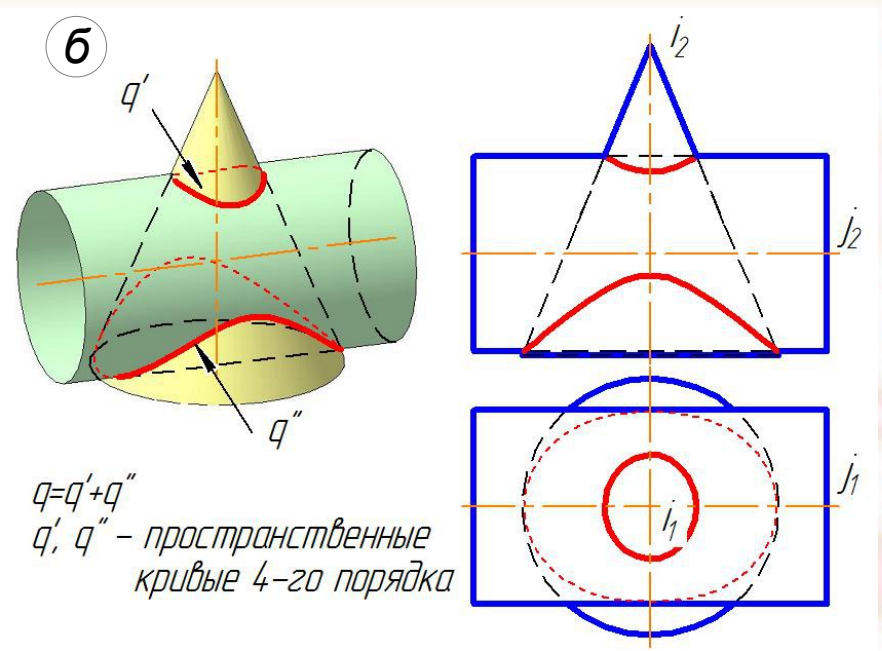
Пересечение поверхностей вращения

Форма линии пересечения

Пространственная или плоская замкнутая кривая.

- Если одна поверхность частично пересекает вторую, линия пересечения состоит из одного замкнутого контура (рис. *а*).
- Если одна поверхность полностью пересекает вторую – линия пересечения распадается на два и более контуров (рис. *б*).



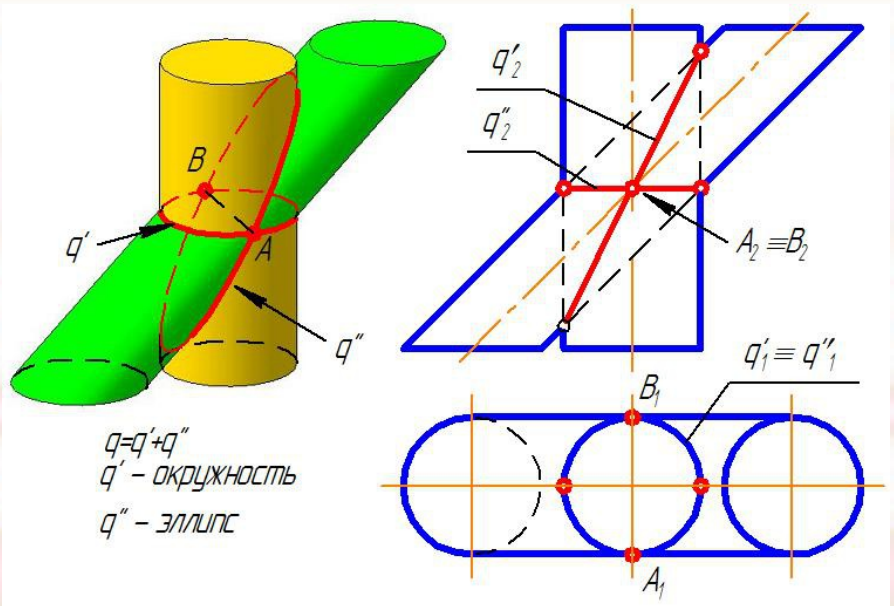


Случаи, когда линия пересечения — плоская кривая

Теорема 1. *Если две поверхности второго порядка (квадрики) имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка (коники), плоскости которых проходят через отрезок прямой, соединяющей эти точки* (рис. *в*).

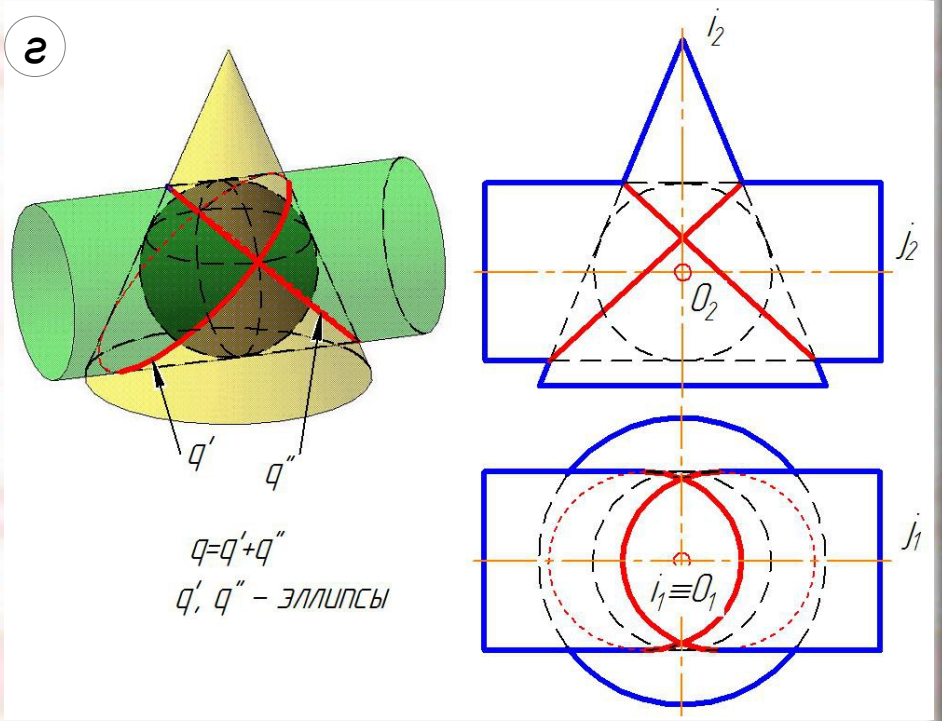
Теорема 2. *Если две квадрики описаны вокруг третьей, то они пересекаются по двум плоским кривым (коникам)* (рис. *г*).

в



Цилиндры имеют две общие точки касания (*A*, *B*) и пересекаются по двум коникам, плоскости которых пересекаются по прямой *AB*.

г



Сфера касается цилиндра и конуса по параллелям, линия пересечения распадается на два эллипса

Характерные точки линии пересечения

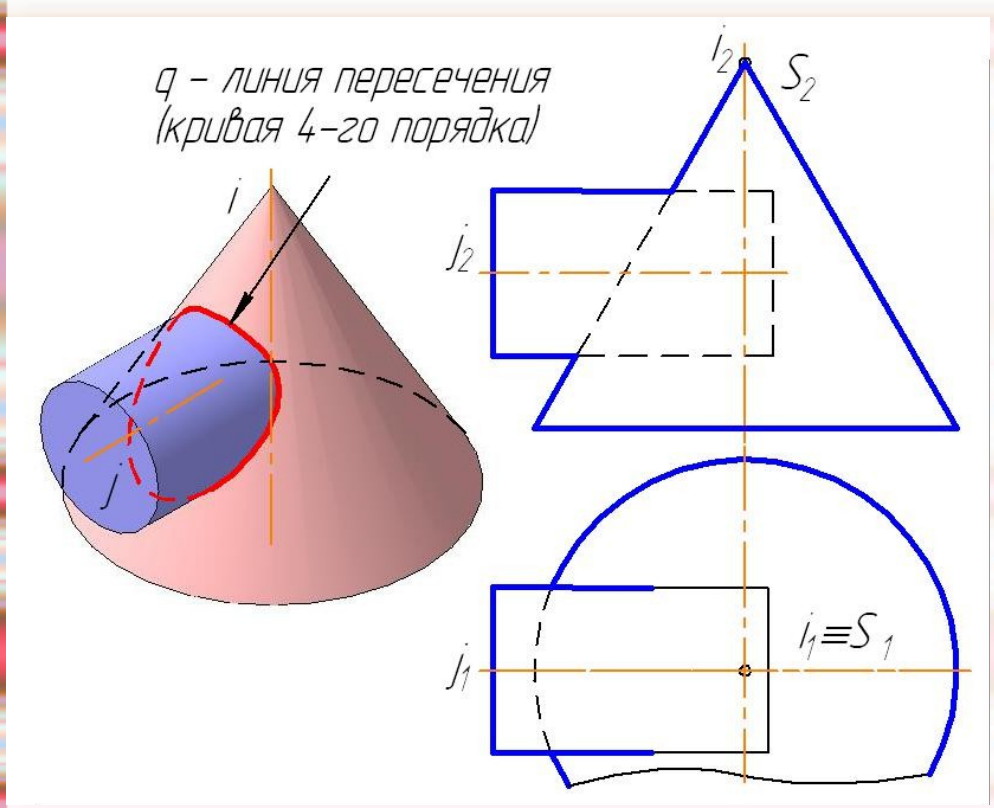
1. *Точки крайних положений:*
   - высшая и низшая
   - правая и левая
   - ближайшая и наиболее удаленная

2. *Точки, лежащие на очерковых образующих или параллелях поверхностей*

3. *Точки границы видимости*

Частный случай. *Пересекаются две поверхности, одна из которых проецирующая.*

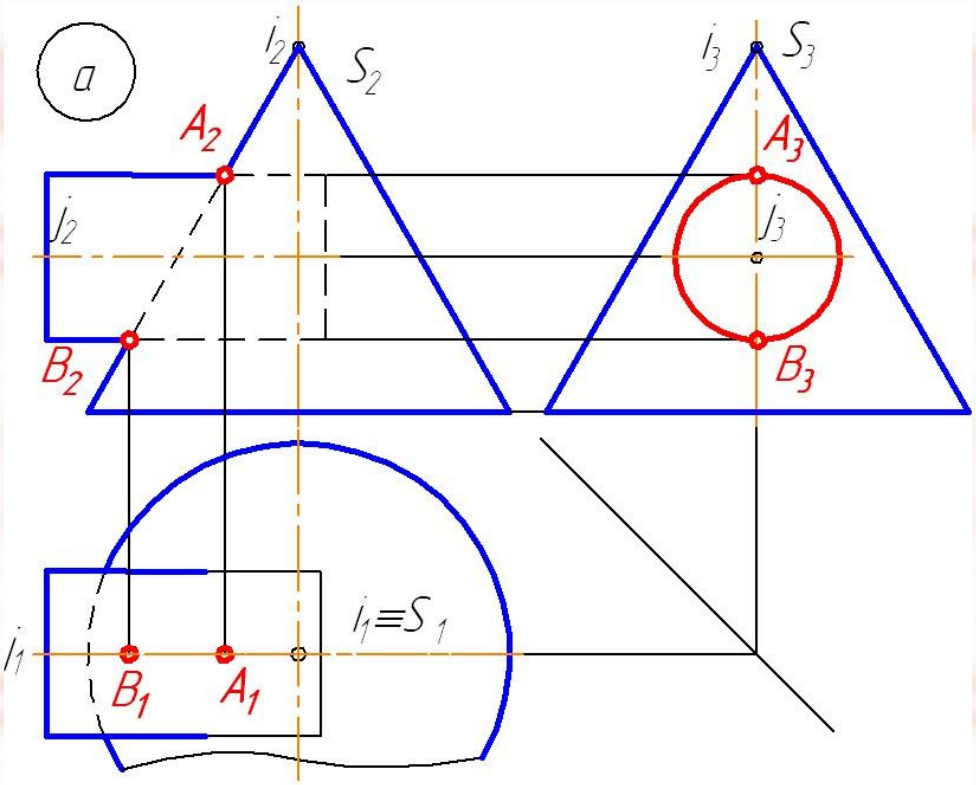
Если одна поверхностей имеет образующие, перпендикулярные плоскости Проекций, ***известна одна из проекций линии пересечения – она совпадает с очерком поверхности.***
Тогда недостающие проекции линии пересечения находятся исходя из принадлежности ее точек второй поверхности.



Ось вращения цилиндра перпендикулярна профильной плоскости проекций - линия пересечения поверхностей (кривая 4-го порядка) проецируется на профильный очерк цилиндра (рис. *а*). Горизонтальные и фронтальные проекции точек линии пересечения определяются исходя из принадлежности их образующим (или параллелям) конуса.

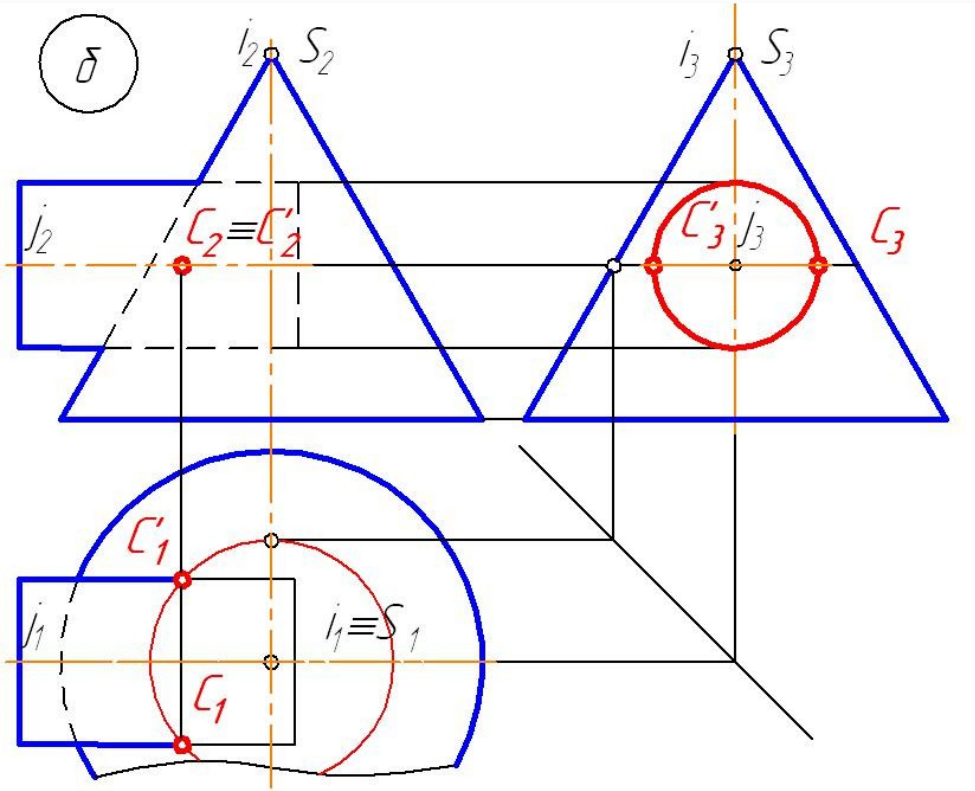
Последовательность нахождения точек линии пересечения

Высшая и низшая точки линии пересечения



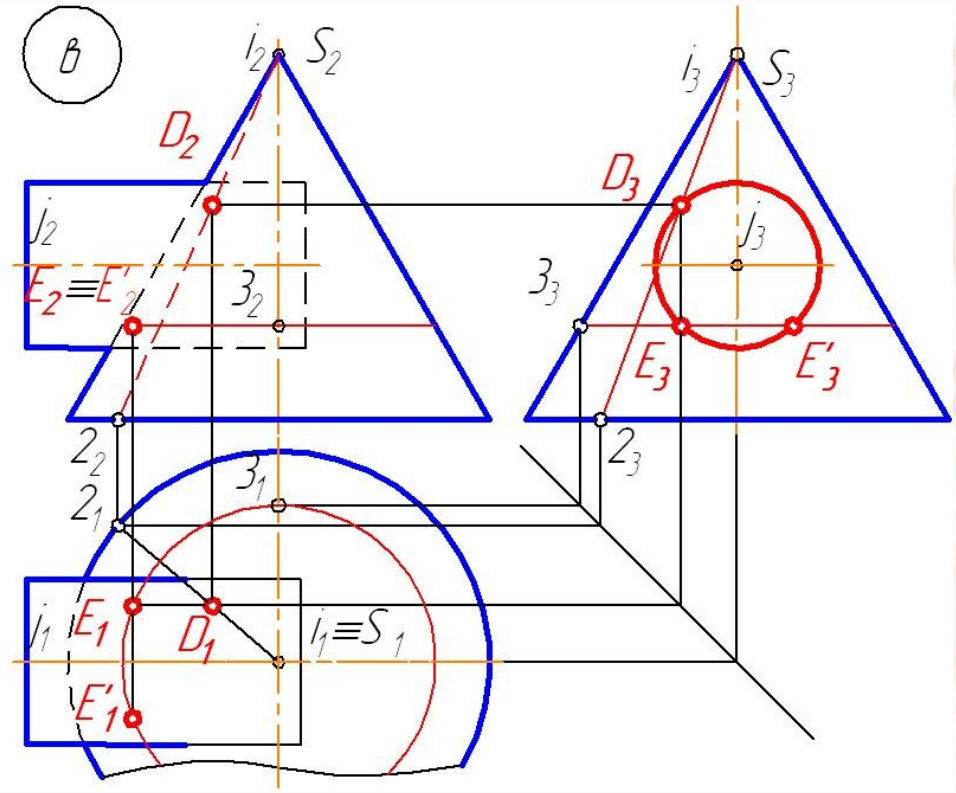
Высшая и низшая точки *A, B* находятся на верхней и нижней образующих цилиндра в месте пересечения их с левой очерковой образующей конуса.

Ближайшая и наиболее удаленная точки линии пересечения

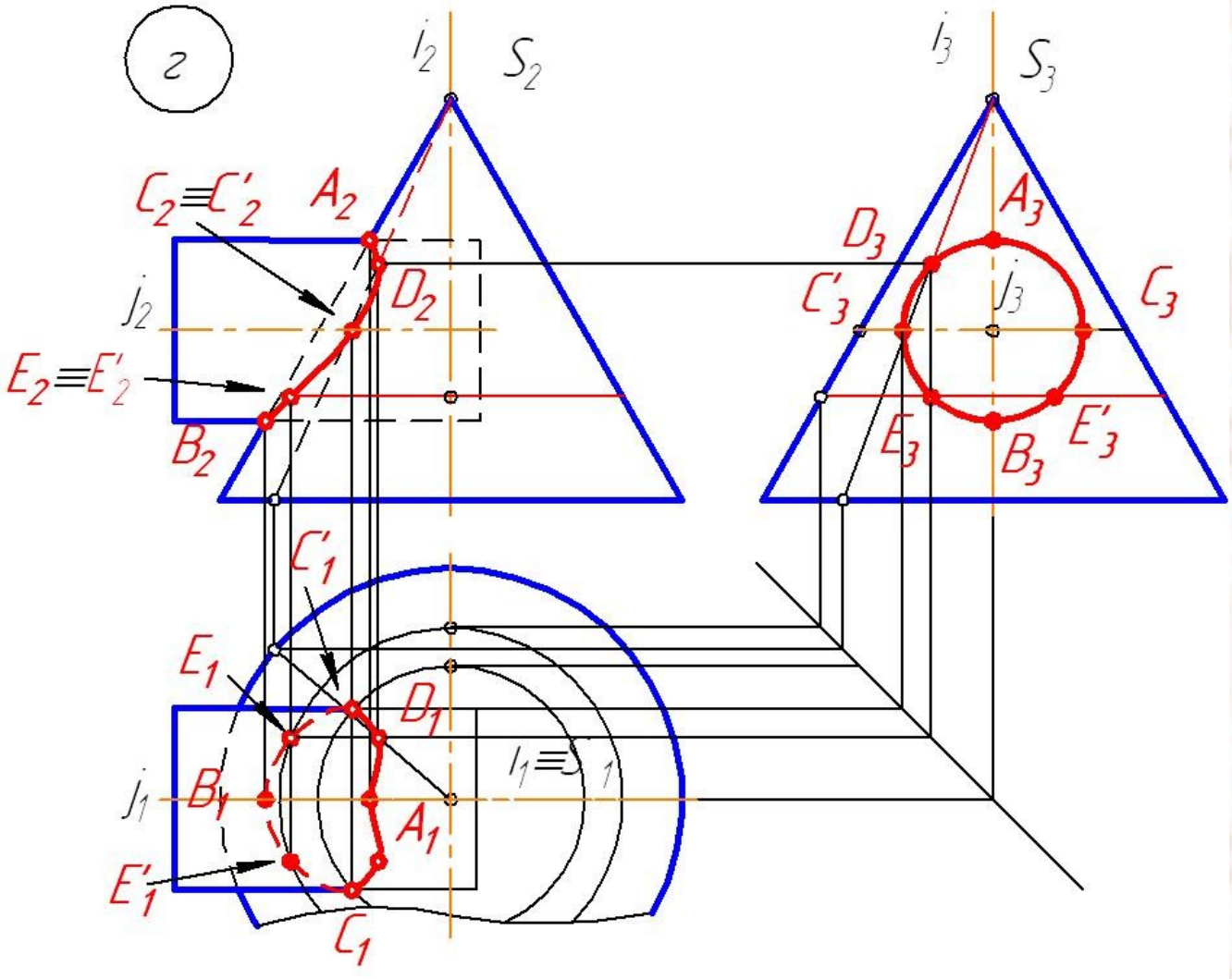


Границу видимости относительно горизонтальной плоскости проекций определяет поверхность цилиндра. Точками перехода являются точки *C, C'*, лежащие на его горизонтальных очерковых образующих
Эти же точки являются ближайшей и наиболее удаленной точками.
Их горизонтальная и фронтальная проекции определяются с помощью параллели конуса.

Промежуточные точки линии пересечения



Промежуточные точки линии пересечения строятся по принадлежности их образующим (точка *D* принадлежит образующей S_1) и параллелям (точки *E, E'*) конуса



Последовательно соединяются точки линии пересечения плавной линией

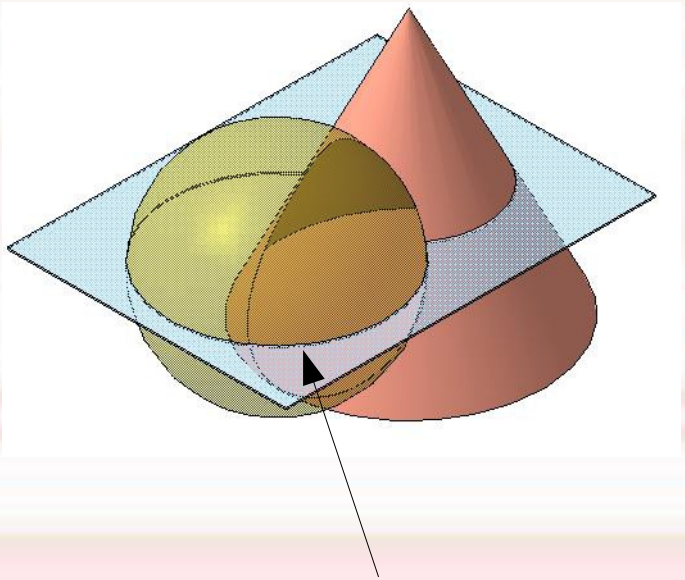
При данном способе построения точно не найдена крайняя правая точка линии пересечения

Часть линии пересечения, принадлежащая верхней половине цилиндра
На горизонтальной плоскости проекций видна

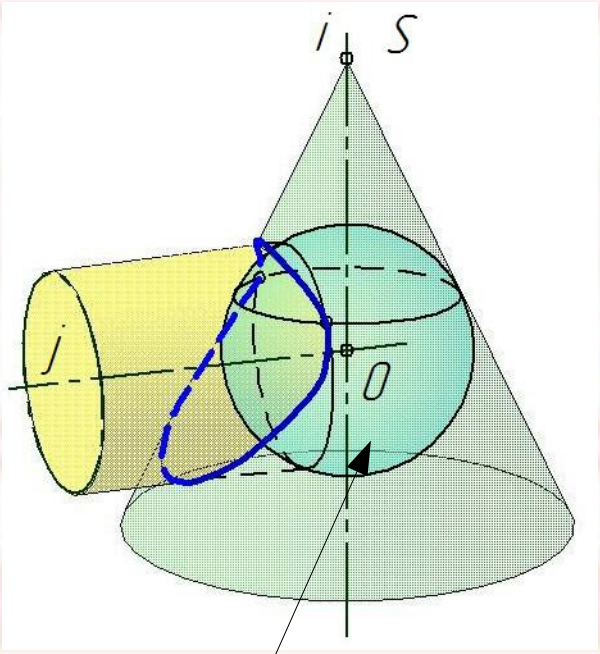
Общий случай

Построение линии пересечения поверхностей вращения в общем случае ведется с помощью ***дополнительных секущих поверхностей***.

Секущие поверхности выбираются таким образом, чтобы с заданными поверхностями они пересекались по линиям, легко определяемым на КЧ (образующим или параллелям).



Способ секущих плоскостей



Способ секущих сфер

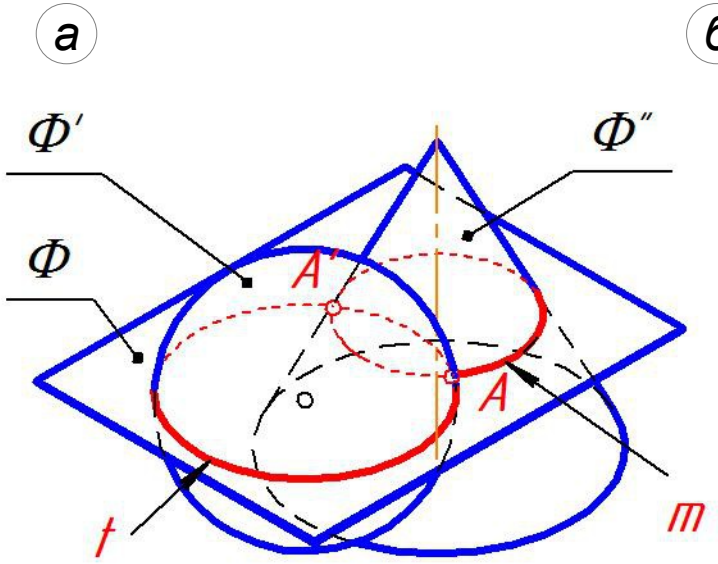
Алгоритм нахождения точки линии пересечения

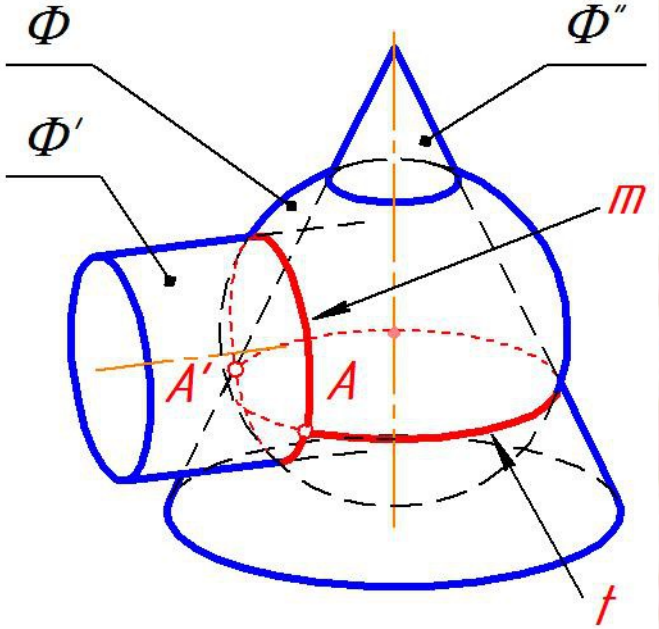
1. Вводится ряд вспомогательных плоскостей (рис. а) или сфер (рис. б), пересекающих обе заданные поверхности.
2. Строится линия пересечения каждой заданной поверхности со вспомогательной.
3. В месте пересечения построенных линий определяются точки искомой линии взаимного пересечения.
4. Соединяются полученные точки между собой с учетом видимости линии пересечения.

Φ'
Φ''

$\Phi' \cap \Phi'' = q$

$A \in q$:
1. Φ
2. $\Phi \cap \Phi' = t$
   $\Phi \cap \Phi'' = m$
3. $t \cap m = A$





Способ секущих плоскостей

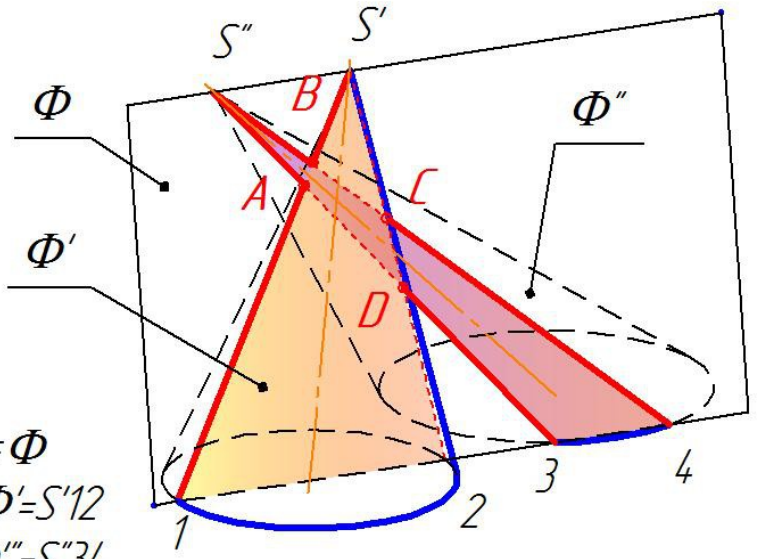
Этот способ применяют тогда, когда обе заданные поверхности можно рассечь дополнительными плоскостями по окружностям-параллелям или прямым-образующим.

Обычно в качестве секущих плоскостей используются плоскости уровня, т.к. линии пересечения их с заданными поверхностями проецируются на плоскость проекций без искажения (рис *а*).

Также в некоторых случаях используются и проецирующие плоскости.

В задачах на пересечение наклонных цилиндров и конусов используются плоскости общего положения (рис. *в, г*)

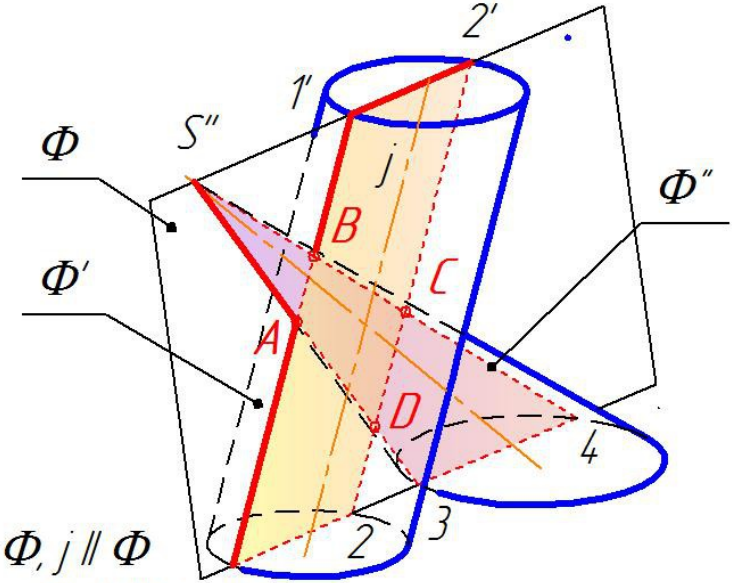
в



1. S′, S″∈Φ
2. Φ∩Φ′=S′12
   Φ∩Φ‴=S″34
3. S′12∩S″34=A, D, C, D

Плоскость проходит через вершины конусов

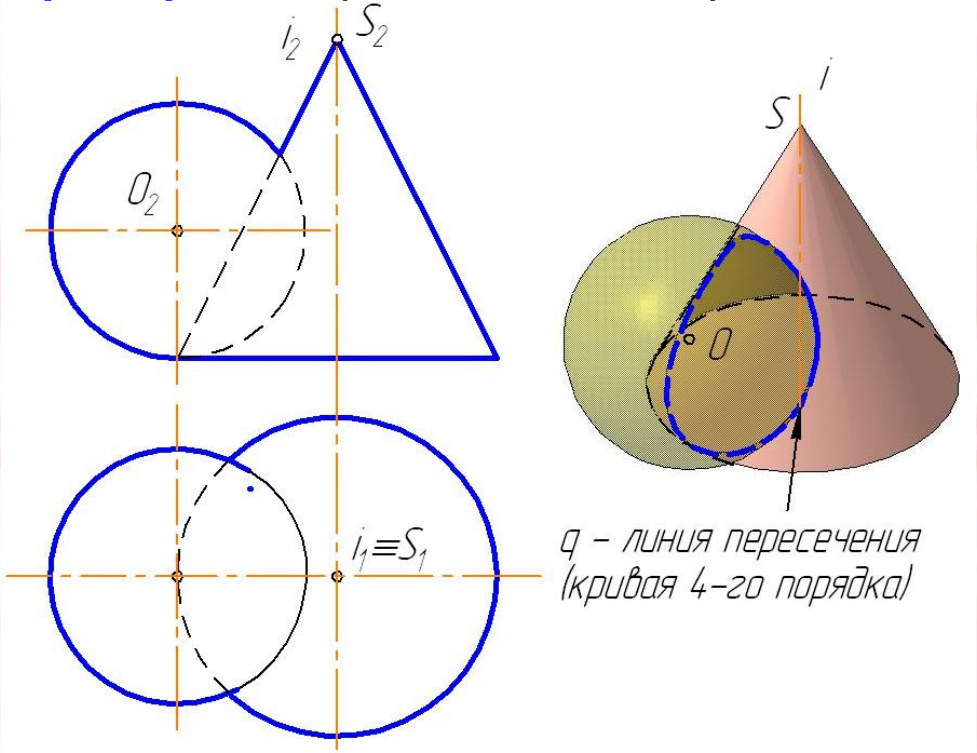
г



1. S″∈Φ, j ∥ Φ
2. Φ∩Φ′=11′2′2
   Φ∩Φ‴=S″34
3. 11′2′2∩S″34=A, D, C, D

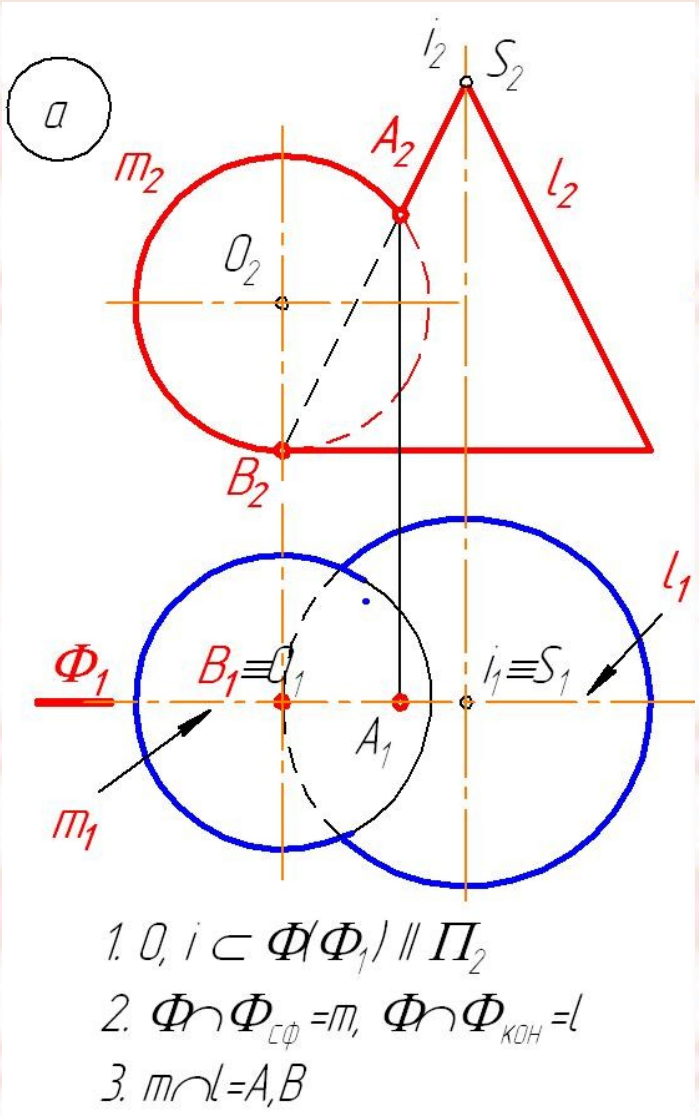
Плоскость проходит через вершину конуса и параллельна оси цилиндра

Пример. *Построить линию пересечения конуса и сферы*

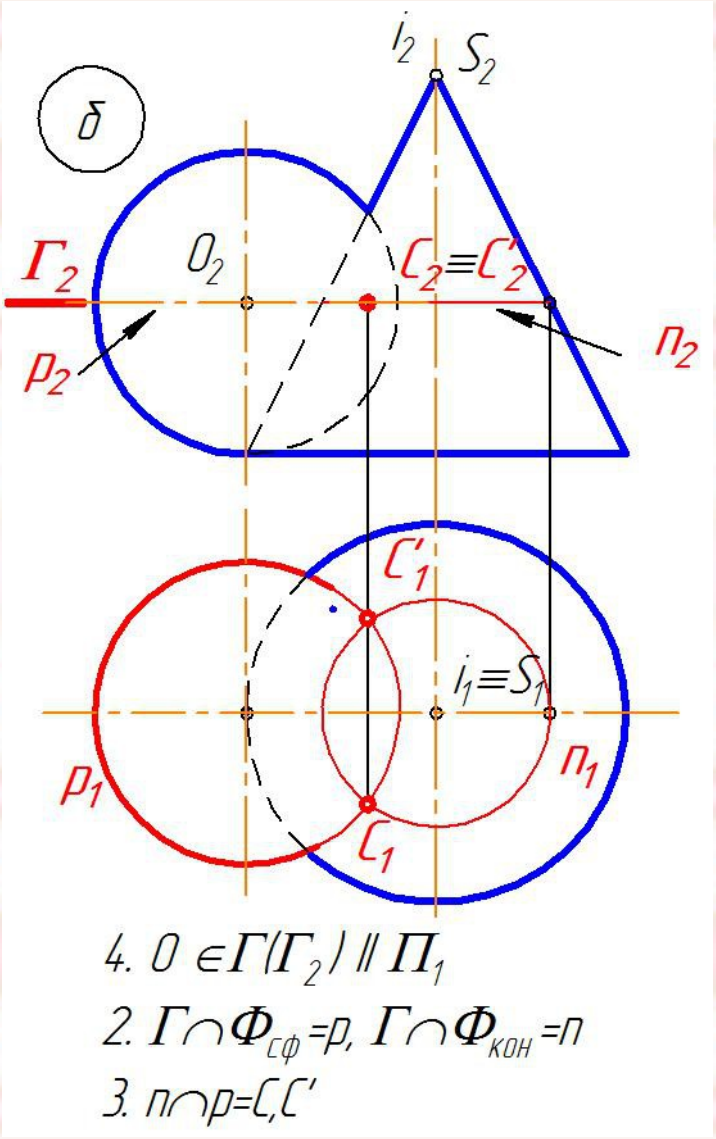


Построение высшей и низшей точек линии пересечения (рис. а)

Конус и сфера имеют общую плоскость симметрии ($Ф_1$), параллельную фронтальной плоскости проекций, с помощью которой находятся высшая и низшая точки линии сечения (точки *A* и *B*). Эта плоскость пересекает конус по очерковым образующим *l*, а сферу – по главному меридиану *m*



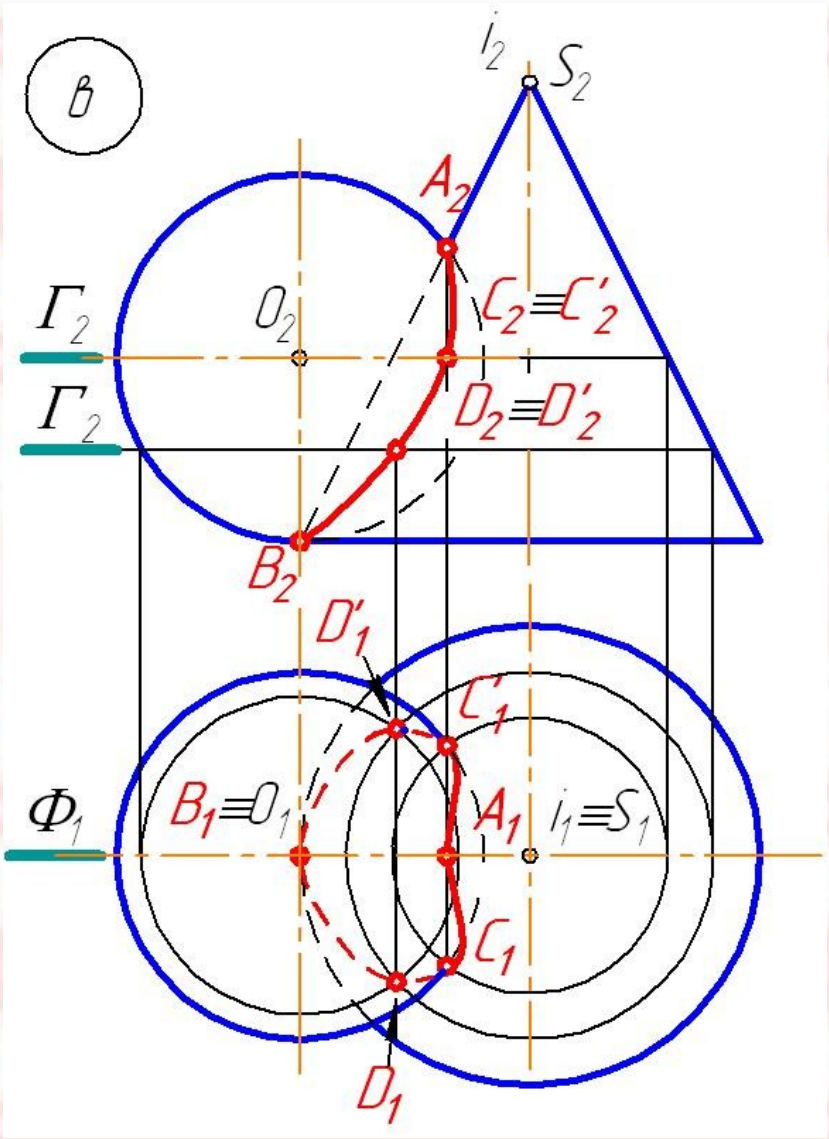
Построение высшей и низшей точек линии пересечения



Видимость линии пересечения относительно горизонтальной плоскости проекций обуславливает сфера и точками границы видимости являются точки *C,* C', располагающиеся на ее экваторе *p*.

Эти точки находятся с помощью горизонтальной плоскости *Г*, пересекающей сферу по экватору, а конус по параллели *n*

Построение промежуточных точек линии пересечения

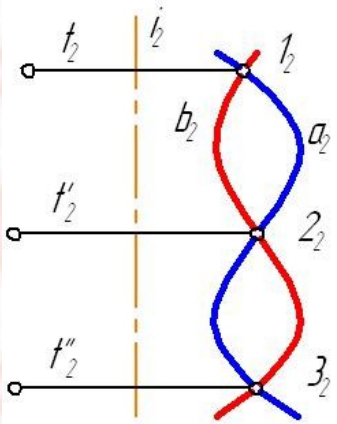


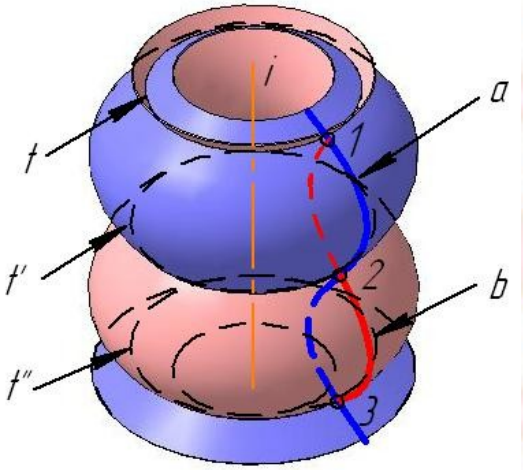
Т.к. обе поверхности содержат семейство параллелей, параллельных горизонтальной плоскости проекций, промежуточные точки находят с помощью дополнительных горизонтальных плоскостей уровня, пересекающих сферу и конус по этим параллелям.

Проекции точек с учетом видимости соединяют между собой плавной линией.
Относительно горизонтальной плоскости проекций видна часть линии пересечения, находящаяся на верхней половине сферы

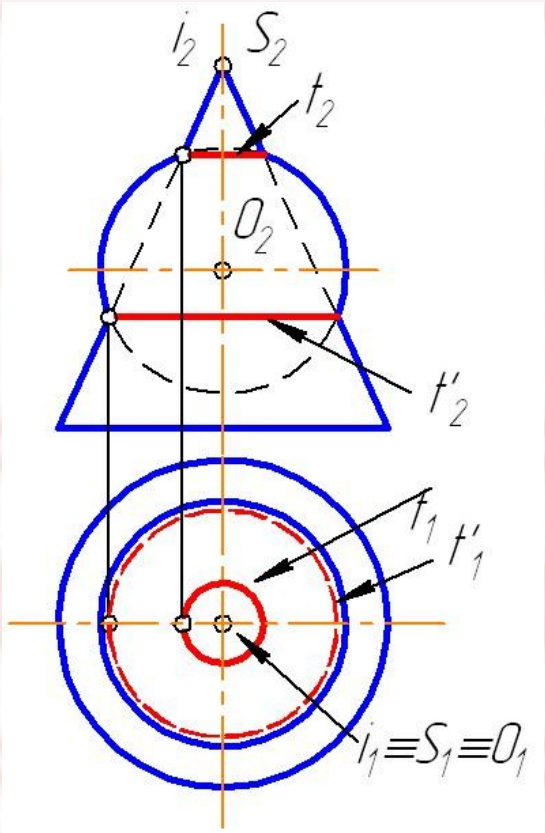
Способ секущих сфер

Теорема:
Две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям-параллелям, число которых равно числу точек пересечения главных полумеридианов поверхностей.





***Соосными** называются поверхности, имеющие общую ось вращения.*



Следствие: *Сфера, центр которой лежит на оси поверхности вращения, пересекается с последней по окружностям*

Плоскость сечения перпендикулярна оси вращения *I* - линия сечения (окружность) проецируется:

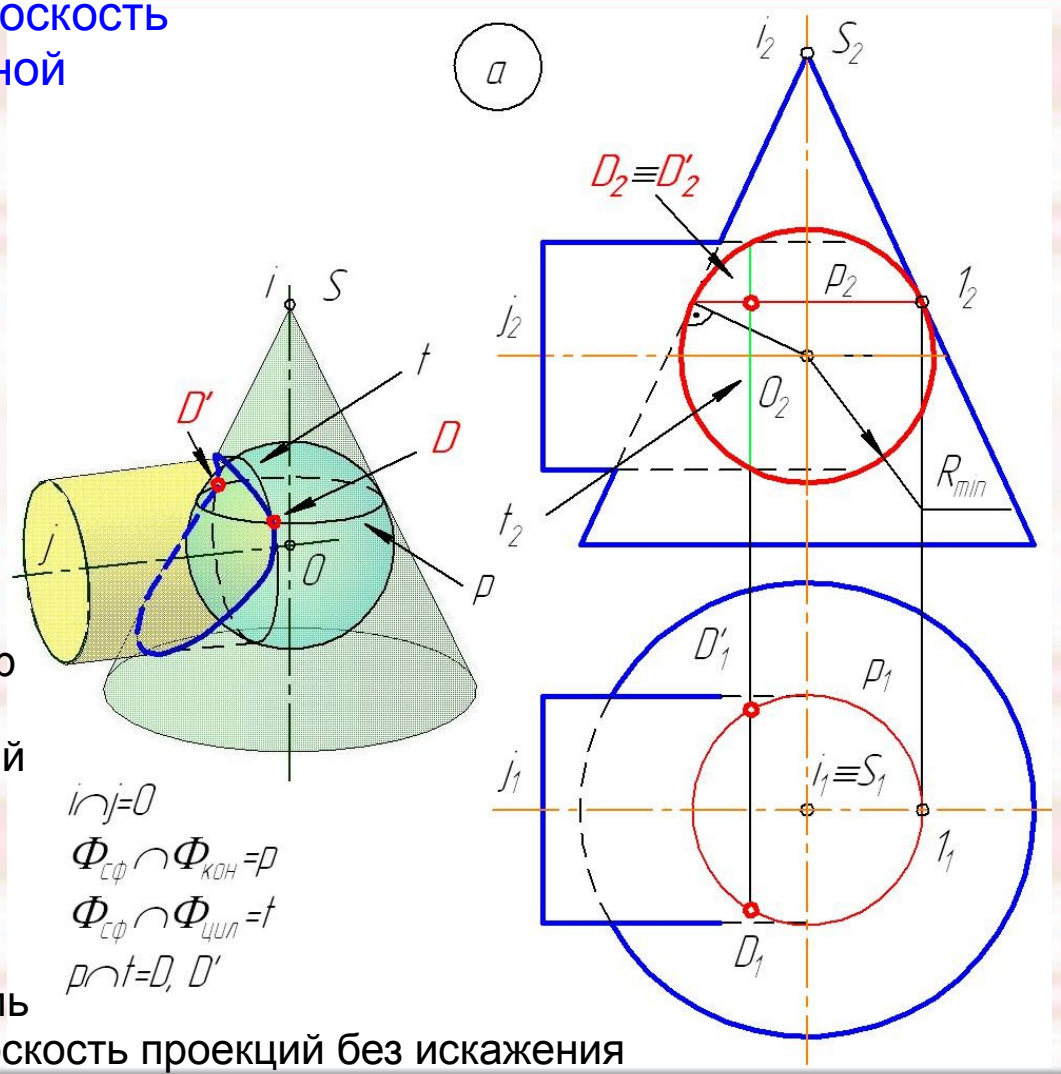
- в окружность на плоскость, перпендикулярную оси *i*;
- в отрезок прямой – на плоскость, параллельную оси *i*;
- в эллипс – на любую другую плоскость.

Способ концентрических сфер

Условия, при которых используются концентрические сферы:

1. Пересекающиеся поверхности – поверхности вращения.
2. Оси поверхностей пересекаются.
3. Поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

Пример. *Построить линию пересечения конуса и цилиндра*

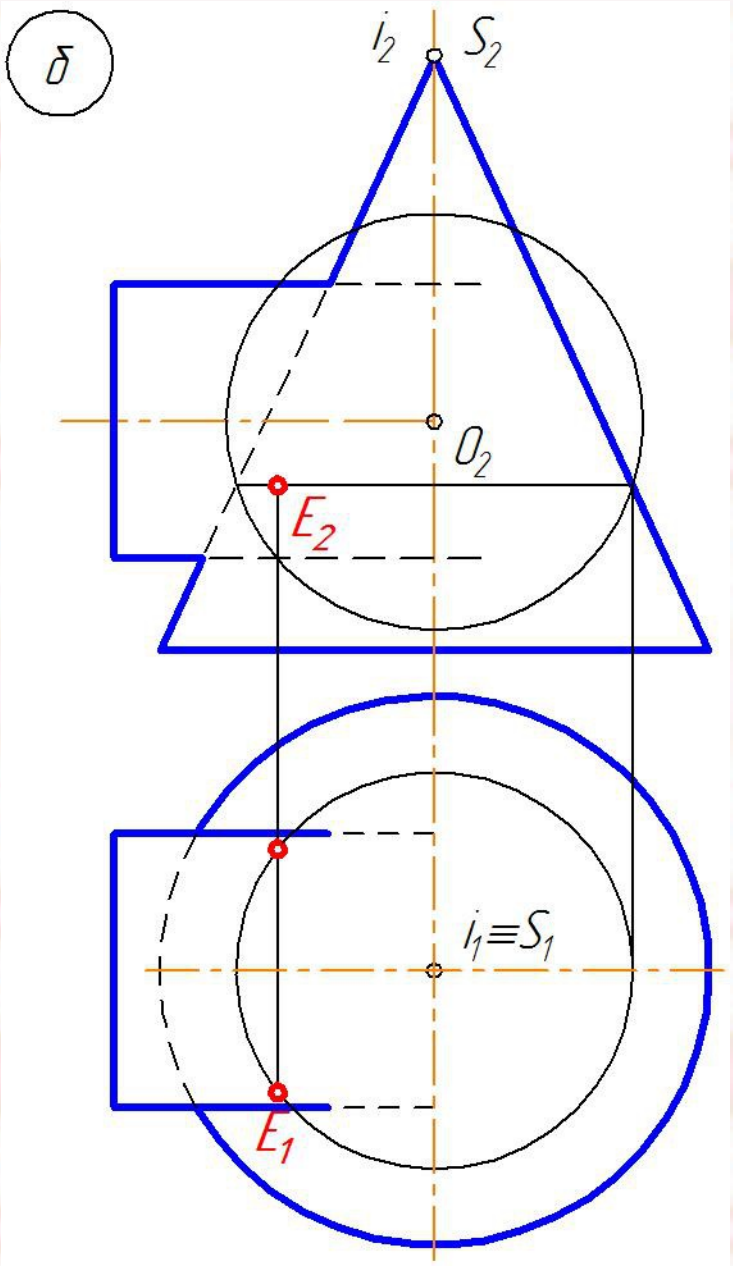


Сфера минимального радиуса проводится так, чтобы она касалась одной поверхности, а вторую пересекала.

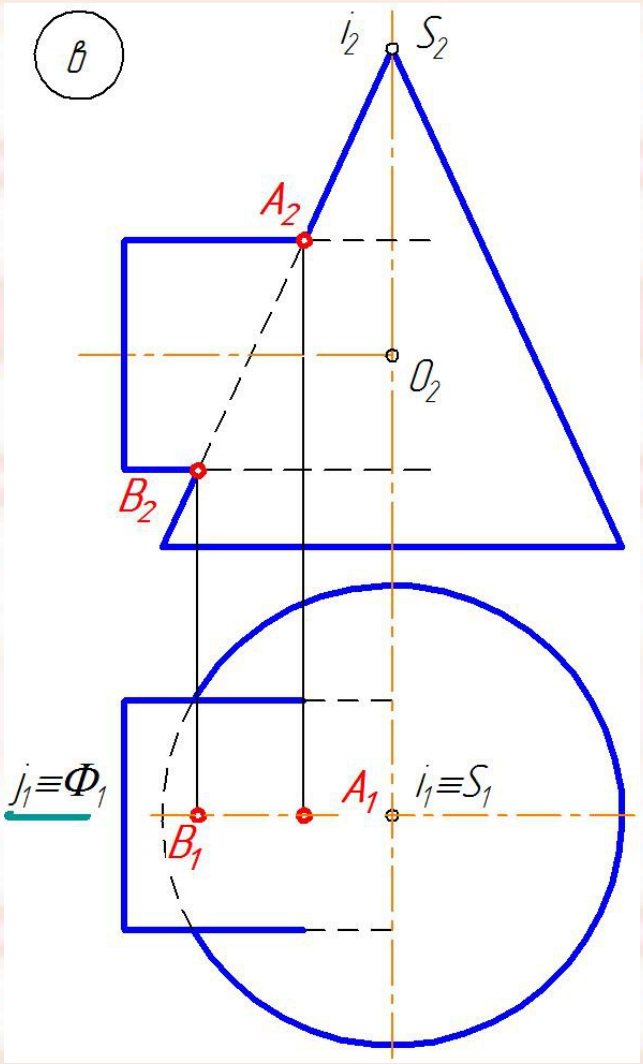
В данной задаче наименьшая сфера касается поверхности конуса по параллели *p* и пересекает цилиндр по параллели *t*.

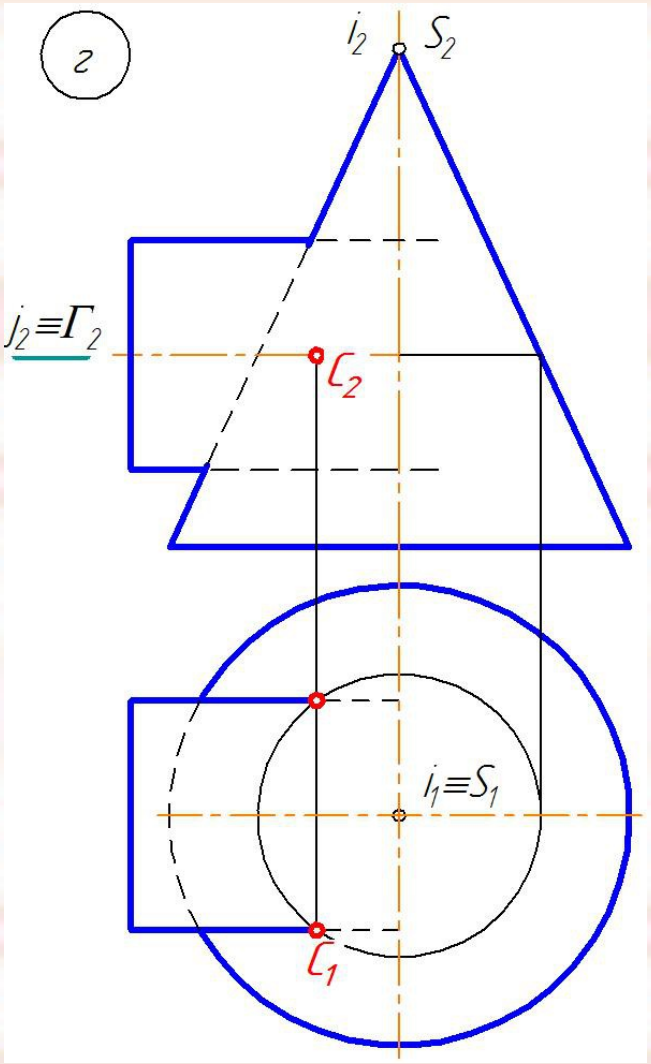
В месте пересечения этих параллелей находятся точки, принадлежащие линии пересечения *D, D'*.

Горизонтальные проекции точек находят по принадлежности их поверхности конуса, т.к. его параллель проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения

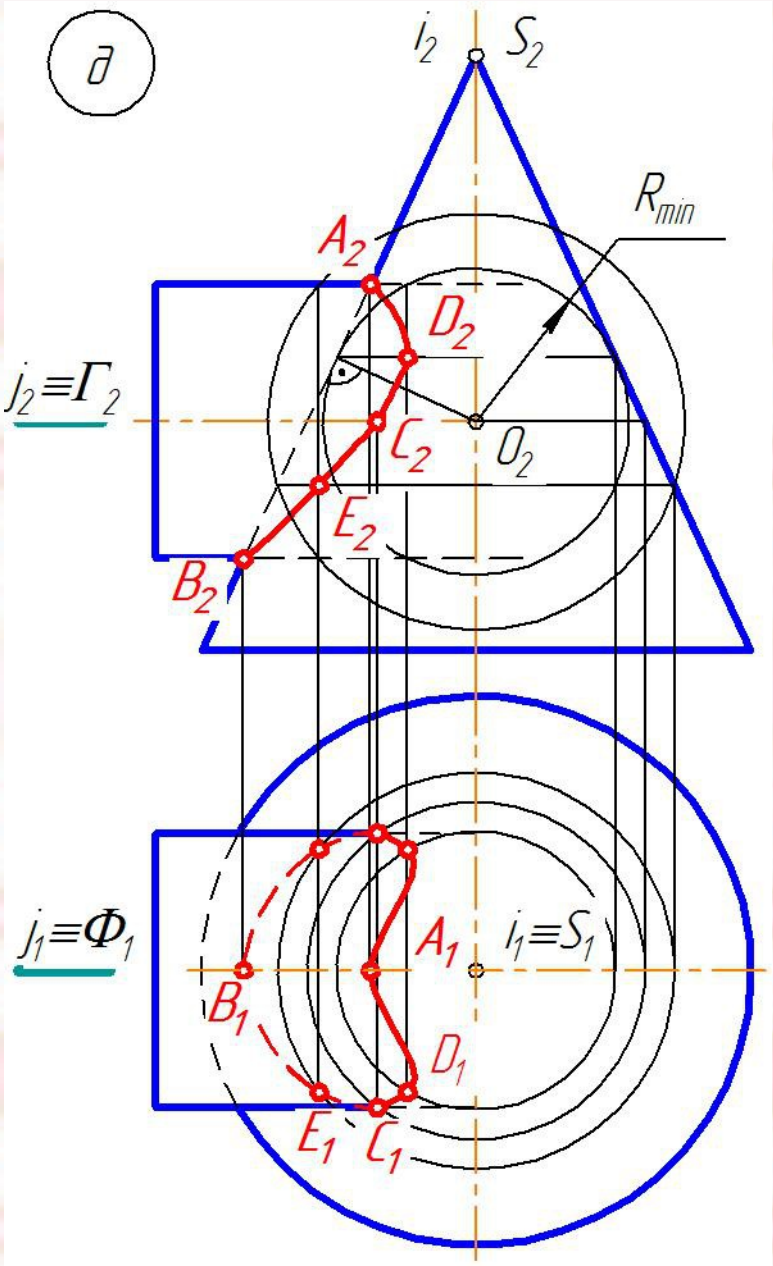


Радиус второй секущей сферы выбирается произвольно





«Крайние» точки сечения – высшая и низшая, ближайшая и наиболее удаленная точки (точки, лежащие на границе видимости относительно горизонтальной плоскости проекций) определяются с помощью плоскостей уровня


д
i_2
S_2
R_{min}
A_2
D_2
$j_2 \equiv \Gamma_2$
C_2
O_2
E_2
B_2
$j_1 \equiv \Phi_1$
A_1
$i_1 \equiv S_1$
B_1
D_1
E_1
C_1

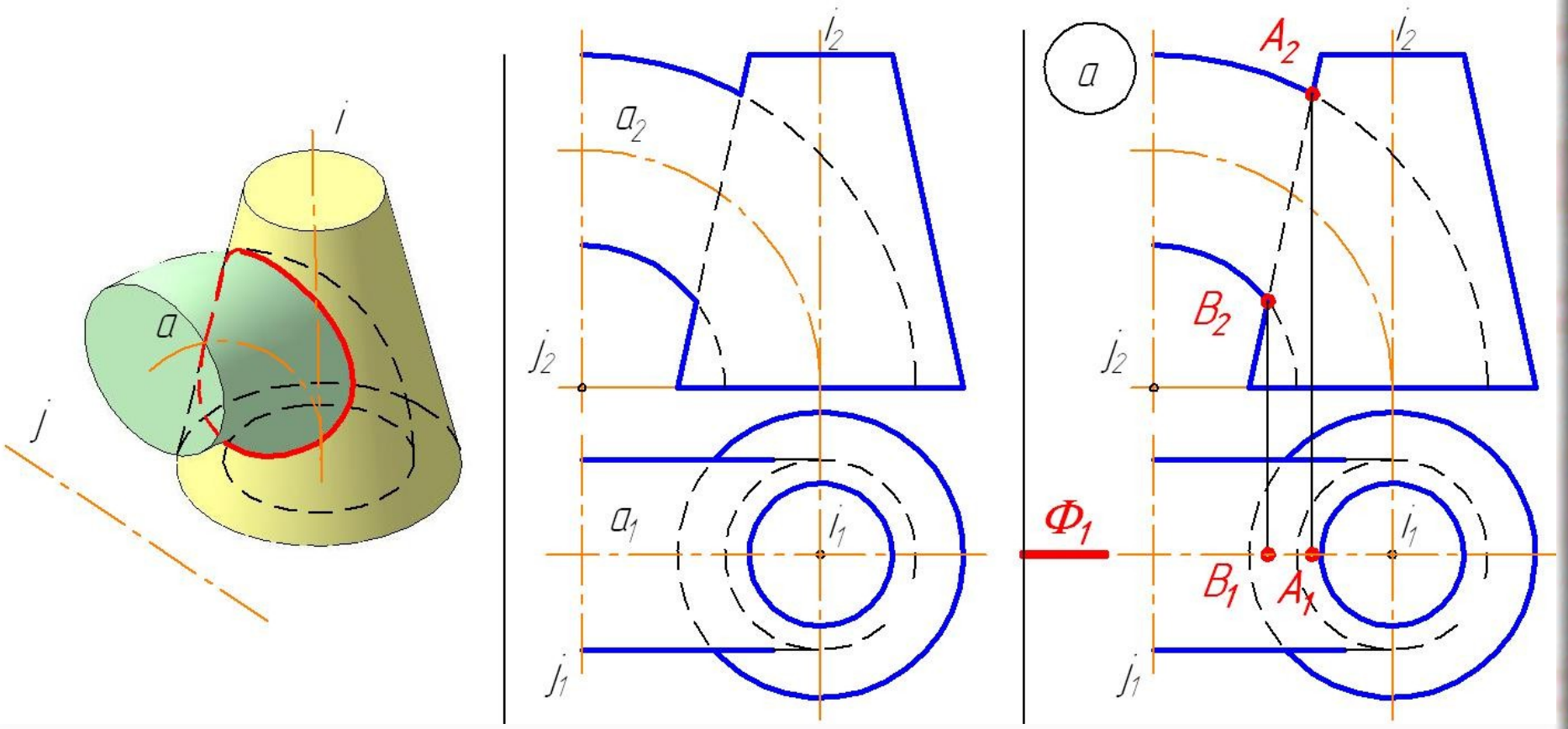
Способ эксцентрических сфер

Условия, при которых используются эксцентрические сферы:

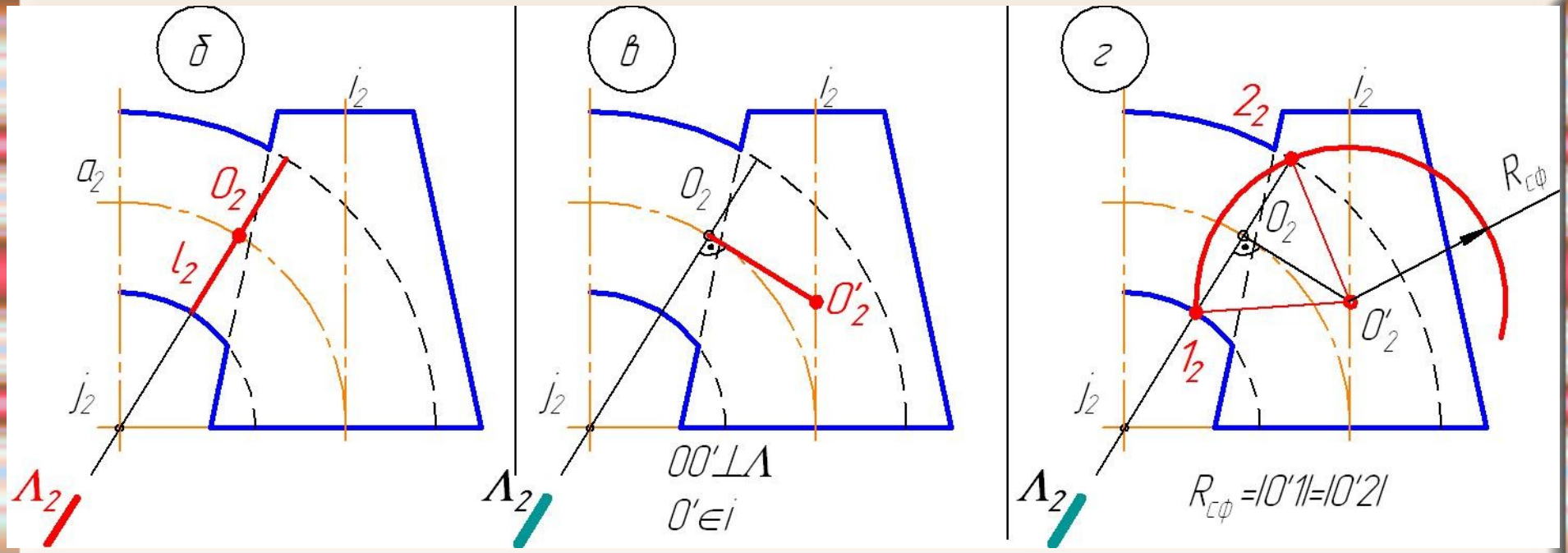
1. Пересекающиеся поверхности – поверхности вращения и циклическая поверхность .
2. Оси поверхностей скрещиваются.
3. Поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

Сущность метода заключается в том, что подбирается сфера, пересекающая обе заданные поверхности по окружностям.
Точки пересечения этих окружностей будут являться искомыми точками линии сечения.

Пример. *Построить линию пересечения конуса и тора*



Заданные поверхности располагаются так, что их оси – скрещивающиеся прямые (i_1, j_2), а фронтальная плоскость (Φ_1) является плоскостью симметрии.
С помощью этой плоскости находятся высшая и низшая точки сечения (рис а).



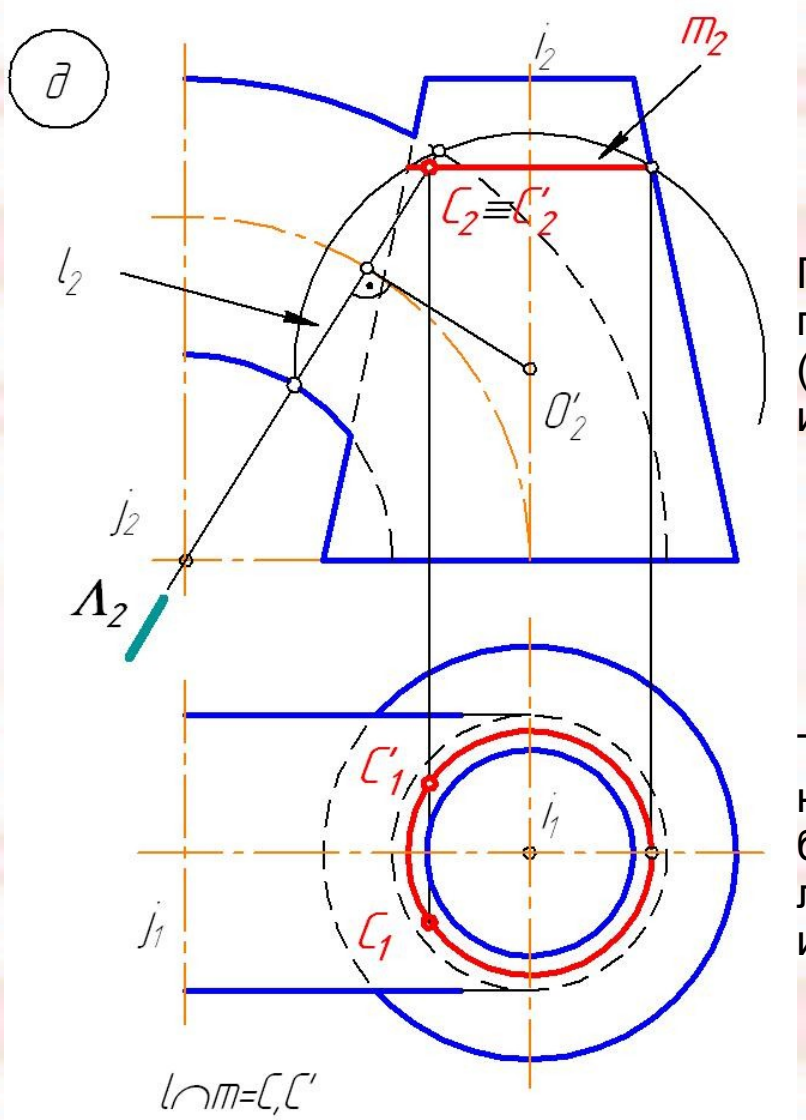
Определение линии пересечения секущей сферы с тором:

Через ось тора *j* проводится фронтально-проецирующую плоскость, пересекающая тор по образующей-окружности *l*. Секущая сфера в дальнейшем должна пересечь тор по этой линии (рис б) Центр сечения (точка *О*) располагается на направляющей торовой поверхности – окружности *а*.

Определяется центр секущей сферы:

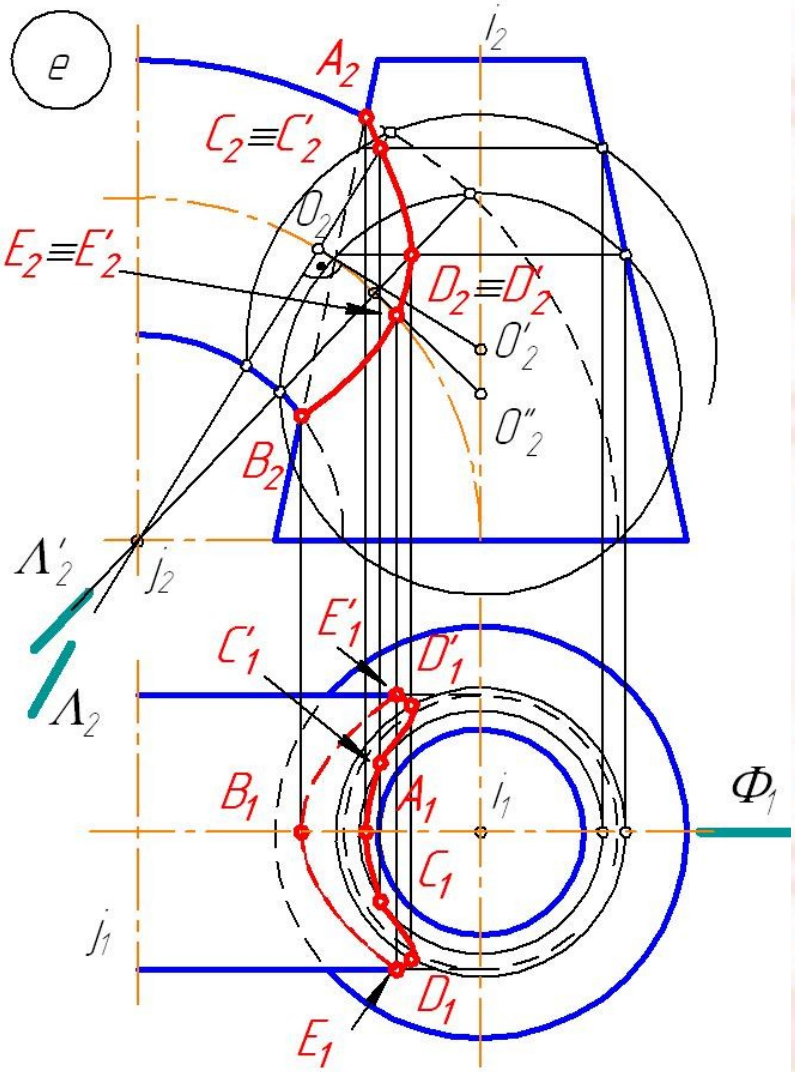
Из центра сечения тора (точки *О*) строится перпендикуляр к плоскости , пересекающий ось *i* в точке *О'* . Центр секущей сферы располагается на оси вращения второй поверхности – усеченного конуса (рис.*в*).

Радиус сферы подбирается таким образом, чтобы она пересекла тор по окружности *l* *(рис. г)*.



Полученная сфера пересекает конус по параллели *m*. На пересечении двух окружностей (параллели конуса и образующей тора) находятся искомые точки *C* и *C'*.

Т.к. параллель конуса проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения, горизонтальные проекции точек линии пересечения строятся по принадлежности их поверхности конуса (рис.*д*).



Вторая пара промежуточных точек *D, D'* находится аналогично

Высшая и низшая точки линии пересечения определяются с помощью фронтальной плоскости уровня ***Φ***, являющейся плоскостью симметрии поверхностей и пересекающей конус по фронтальным очерковым образующим, а тор по наименьшей и наибольшей параллелям.

Видимость линии пересечения относительно горизонтальной плоскости проекций в данном случае определяют точки, лежащие на горизонтальных очерковых параллелях тора. Местоположения их определяется приближенно: строится фронтальная проекция линии пересечения, находятся фронтальные проекции точек границы видимости, затем по линиям связи на горизонтальном очерке тора определяются их горизонтальные проекции